2024年度10月期入学 / 2025年度4月期入学
京都大学 大学院情報学研究科
修士課程 知能情報学コース / データ科学コース 入学者選抜試験問題
(情報学基礎)

2024年8月6日 9:00〜11:00

【注意】
1. 問題冊子はこの表紙を含めて11枚ある。
2. 試験開始の合図があるまで中を見てはいけない。
3. 試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷の不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
4. 問題は日本語と英語の両方で出題されている。**すべて解答しなさい。**
   - F1-1, F1-2　線形代数、微分積分 ……………………… 1-4ページ
   - F2-1, F2-2　アルゴリズムとデータ構造 ……………… 5-10ページ
5. 特に指定のない限り、日本語または英語で解答すること。
6. 解答用紙に記載されている注意事項についても留意すること。

October 2024 Admissions / April 2025 Admissions
Entrance Examination for Master's Program
Intelligence Science and Technology Course / Data Science Course
Graduate School of Informatics, Kyoto University
(Fundamentals of Informatics)

August 6, 2024
9:00 - 11:00

NOTES
1. This is the Question Booklet in 11 pages including this front cover.
2. Do not open the booklet until you are instructed to start.
3. After the examination has started, check the number of pages and notify proctors (professors) immediately if you find missing pages or unclear printings.
4. Questions are written in Japanese and English. **Answer all the questions.**
   - F1-1, F1-2　Linear Algebra, Calculus …………………… Pages 1 to 4
   - F2-1, F2-2　Algorithms and Data Structures ………… Pages 5 to 10
5. Write your answer in Japanese or English, unless otherwise specified.
6. Read carefully the notes on the Answer Sheets as well.

F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

以下の設問において $\mathbb{R}$ は実数全体の集合を表す。ベクトル $\mathbf{a}$ に対して $\mathbf{a}^\top$ は $\mathbf{a}$ の転置を表し、行列 $\mathbf{A}$ に対して $\mathbf{A}^{-1}$ は $\mathbf{A}$ の逆行列を表す。$\mathbf{0}$ は零ベクトルを表す。また、$\mathbf{I}_n$ は n 行 n 列の単位行列を表す。

設問 1　$\mathbf{0}$ でない列ベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、行列 $\mathbf{T}$ を

$$\mathbf{T} = \mathbf{I}_n - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^\top}{\mathbf{v}^\top\mathbf{v}}$$

と定義する。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $\mathbf{T}$ が対称行列であることを示せ。

(2) $\mathbf{T}$ が直交行列であることを示せ。

(3) $\mathbf{T}$ の固有値を全て求めよ。

(4) $\mathbf{T}$ の行列式の値を求めよ。

(5) 列ベクトル $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^n$ を

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

と定義する。$\mathbf{e}_1$ の定数倍でない列ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき、$\mathbf{T}\mathbf{x}$ が $\mathbf{e}_1$ の定数倍となるように $\mathbf{v}$ を定め、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{e}_1$ を用いて表せ。

設問 2　以下の問いに答えよ。

(1) $\mathbf{P}$ を n 行 n 列の任意の実行列とし、$\mathbf{I}_n + \mathbf{P}$ が正則であるとする。このとき、次の等式が成り立つことを示せ。

$$(\mathbf{I}_n + \mathbf{P})^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{I}_n + \mathbf{P})^{-1}$$

(2) $\mathbf{Q}$ を n 行 m 列の実行列、$\mathbf{R}$ を m 行 n 列の実行列とし、$\mathbf{I}_n + \mathbf{Q}\mathbf{R}$ が正則であるとする。このとき、$\mathbf{I}_m + \mathbf{R}\mathbf{Q}$ が正則であること、および次の等式が成り立つことを示せ。

$$(\mathbf{I}_n + \mathbf{Q}\mathbf{R})^{-1}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{I}_m + \mathbf{R}\mathbf{Q})^{-1}$$

Master's Program	**Fundamentals of Informatics**	**[Linear Algebra, Calculus]**	**Question Number**	**F1–1**

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

In the questions below, $\mathbb{R}$ denotes the set of all real numbers, $\mathbf{a}^\top$ stands for the transpose of a vector a, $\mathbf{A}^{-1}$ is the inverse of a matrix $\mathbf{A}$, and $\mathbf{I}_n$ denotes the identity matrix of size $n \times n$.

Q.1 Let $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ be a nonzero column vector, and define a matrix $\mathbf{T}$ as

$$\mathbf{T} = \mathbf{I}_n - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^\top}{\mathbf{v}^\top\mathbf{v}}.$$

Answer the following questions.

(1) Show that $\mathbf{T}$ is a symmetric matrix.

(2) Show that $\mathbf{T}$ is an orthogonal matrix.

(3) Compute all the eigenvalues of $\mathbf{T}$.

(4) Compute the determinant of $\mathbf{T}$.

(5) Define a column vector $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^n$ as

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Given a column vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, which is not $\mathbf{e}_1$ multiplied by any scalar. Determine $\mathbf{v}$ so that $\mathbf{T}\mathbf{x}$ becomes $\mathbf{e}_1$ multiplied by some scalar, and express it using $\mathbf{x}$ and $\mathbf{e}_1$.

Q.2 Answer the following questions.

(1) Let $\mathbf{P}$ be an arbitrary real matrix of size $n \times n$. Assume that $\mathbf{I}_n + \mathbf{P}$ is non-singular. Show that the following equation holds.

$$(\mathbf{I}_n + \mathbf{P})^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{I}_n + \mathbf{P})^{-1}$$

(2) Let $\mathbf{Q}$ and $\mathbf{R}$ be arbitrary real matrices of size $n \times m$ and $m \times n$, respectively. Assume that $\mathbf{I}_n + \mathbf{Q}\mathbf{R}$ is non-singular. Show that $\mathbf{I}_m + \mathbf{R}\mathbf{Q}$ is non-singular and that the following equation holds.

$$(\mathbf{I}_n + \mathbf{Q}\mathbf{R})^{-1}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{I}_m + \mathbf{R}\mathbf{Q})^{-1}$$

修士課程　情報学基礎　【線形代数、微分積分】　| 問題番号 | F1–2 |

F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

以下の設問において、$\log x$ は x の自然対数、e はネイピア数（自然対数の底）を表す。

設問 1　以下の問いに答えよ。計算過程も明示すること。

(1) n を正の整数とする。$f(x) = x^2 e^{-x}$ の n 階導関数を求めよ。

(2) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \log(\tan x)^{\cos x}$$

設問 2　球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ と円柱 $x^2 + y^2 \leq 9, -\infty < z < \infty$ の共通部分の体積を求めよ。計算過程も明示すること。

設問 3　以下の問いに答えよ。

(1) 任意の正の整数 n について、不等式

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{2(n+1)!}$$

が成立することを示せ。

(2) (1) の不等式を用いて e が無理数であることを示せ。

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

In the questions below, $\log x$ denotes the natural logarithm of x, and e denotes Napier's constant (the base of the natural logarithm).

Q.1 Answer the following questions. Derivations must be clearly shown.

(1) Let n be a positive integer. Compute the n-th derivative of $f(x) = x^2 e^{-x}$.

(2) Compute the following limit.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \log(\tan x)^{\cos x}$$

Q.2 Compute the volume common to a sphere $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ and a cylinder $x^2 + y^2 \leq 9$, $-\infty < z < \infty$. Derivation must be clearly shown.

Q.3 Answer the following questions.

(1) Show that the inequality

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{2(n+1)!}$$

holds for any positive integer n.

(2) Show that e is an irrational number using the inequality in (1).

F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 1　長さ 12 の数列 $S = (3, -1, 2, -4, 5, -1, 3, -3, 4, -2, 1, -2)$ において、S の i 番目の要素の値を $s(i)$ で表し、例えば $s(1) = 3$ である。
$\mathrm{maxSum}(i, j) = \max_{i \le a \le b \le j} \Sigma_{k=a}^{b} s(k)$ とし、$M = \mathrm{maxSum}(1, 12)$ とする。

(1) $\mathrm{maxSum}(1, 4)$ の値を求めよ。

(2) M と、$\Sigma_{k=a}^{b} s(k) = M$ となる (a, b) の値をすべて導出せよ。

(3) $\Sigma_{k=a}^{b} s(k) = M - 1$ となる (a, b) の値をすべて導出せよ。

設問 2　乱数を用いて無向グラフを生成する以下の擬似コードで記載されるアルゴリズムを考える。

let $G_1(V_1, E_1)$ be an undirected graph with $V_1 = \{v_0, v_1\}$ and $E_1 = \{\{v_0, v_1\}\}$;
for $i = 2$ to n **do**
begin
　let v_i be a new vertex;
　let v_j and v_k be distinct vertices randomly selected from V_{i-1};
　let $G_i(V_i, E_i)$ be an undirected graph with $V_i = V_{i-1} \cup \{v_i\}$ and
　　$E_i = E_{i-1} \cup \{\{v_i, v_j\}, \{v_i, v_k\}\}$;
end

なお、どの異なる頂点対 (v_j, v_k) についても、その選択確率は正であるものとする。このアルゴリズムにより生成されるグラフ $G_n(V_n, E_n)$ は連結であり、$n+1$ 個の頂点を持ち、かつ、自己閉路および多重辺を含まないのは明らかである。以下では、G_n で $G_n(V_n, E_n)$ を表すものとする。

グラフ G_n における頂点 $v_p \in V_n$ の次数（v_p に接続する辺の個数）を $\mathrm{deg}_{G_n}(v_p)$ とし、V_n 中の異なる 2 頂点 v_p, v_q 間を結ぶ最短経路（辺数が最小の経路）の長さ（辺数）を $\mathrm{dist}_{G_n}(v_p, v_q)$ とする。$\mathrm{deg}_{G_n}(v_p)$ および $\mathrm{dist}_{G_n}(v_p, v_q)$ は、アルゴリズム中でランダムに選択された頂点に依存して決まる正整数である。

以下では、n を 4 以上の偶数とし、このアルゴリズムにより生成されうるすべての G_n からなる無向グラフの集合を $\mathcal{G}_n$ とする。すると例えば、どの n に対しても、
$\min_{G_n \in \mathcal{G}_n}\{\ \min_{v_p \in V_n}\{\mathrm{deg}_{G_n}(v_p)\}\ \}$ も $\max_{G_n \in \mathcal{G}_n}\{\ \min_{v_p \in V_n}\{\mathrm{deg}_{G_n}(v_p)\}\ \}$ も 2 となる。その理由は、常に $\mathrm{deg}_{G_n}(v_n) = 2$ となり、かつ、どの頂点 $v_p \in V_n$ についても常に $\mathrm{deg}_{G_n}(v_p) \ge 2$ となるからである。

以下のそれぞれの値を導出せよ。なお、それぞれの値は n を含む式となる場合もある。

(1) $\max_{G_n \in \mathcal{G}_n}\{\ \max_{v_p \in V_n}\{\mathrm{deg}_{G_n}(v_p)\}\ \}$

(2) $\min_{G_n \in \mathcal{G}_n}\{\ \max_{p<q, v_p \in V_n, v_q \in V_n}\{\mathrm{dist}_{G_n}(v_p, v_q)\}\ \}$

(3) $\max_{G_n \in \mathcal{G}_n}\{\ \max_{p<q, v_p \in V_n, v_q \in V_n}\{\mathrm{dist}_{G_n}(v_p, v_q)\}\ \}$

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.1 Let $S = (3, -1, 2, -4, 5, -1, 3, -3, 4, -2, 1, -2)$ be a number sequence of length 12 and $s(i)$ is the value of the i-th element of S. For example, $s(1) = 3$ holds. Let us define $\text{maxSum}(i, j) = \max_{i \le a \le b \le j} \Sigma_{k=a}^{b} s(k)$ and $M = \text{maxSum}(1, 12)$.

(1) Derive the value of $\text{maxSum}(1, 4)$.

(2) Derive M and all the values of (a, b) that satisfy $\Sigma_{k=a}^{b} s(k) = M$.

(3) Derive all the values of (a, b) that satisfy $\Sigma_{k=a}^{b} s(k) = M - 1$.

Q.2 Consider an algorithm for generating an undirected graph using random numbers, whose pseudocode is given below.

let $G_1(V_1, E_1)$ be an undirected graph with $V_1 = \{v_0, v_1\}$ and $E_1 = \{\{v_0, v_1\}\}$;
for $i = 2$ to n **do**
begin
  let v_i be a new vertex;
  let v_j and v_k be distinct vertices randomly selected from V_{i-1};
  let $G_i(V_i, E_i)$ be an undirected graph with $V_i = V_{i-1} \cup \{v_i\}$ and
    $E_i = E_{i-1} \cup \{\{v_i, v_j\}, \{v_i, v_k\}\}$;
end

Note that for any pair of distinct vertices (v_j, v_k), the selection probability is positive. Obviously, any graph $G_n(V_n, E_n)$ constructed by this algorithm is connected, has $n + 1$ vertices, and does not contain a self-loop or a multi-edge. In the following, we use G_n to denote $G_n(V_n, E_n)$.

For a graph G_n, $\deg_{G_n}(v_p)$ denotes the degree of a vertex $v_p \in V_n$ (i.e., the number of edges connecting to v_p), and $\text{dist}_{G_n}(v_p, v_q)$ denotes the length (i.e., the number of edges) of the shortest path (i.e., the path consisting of the minimum number of edges) between two distinct vertices v_p and v_q in V_n. Note that $\deg_{G_n}(v_p)$ and $\text{dist}_{G_n}(v_p, v_q)$ are positive integers depending on randomly selected vertices in the algorithm.

In the following, n is an even number greater than or equal to 4. Let $\mathcal{G}_n$ be the set of all possible undirected graphs G_n generated by this algorithm. For example, for any n, $\min_{G_n \in \mathcal{G}_n}\{\ \min_{v_p \in V_n}\{\deg_{G_n}(v_p)\}\ \} = 2$ and $\max_{G_n \in \mathcal{G}_n}\{\ \min_{v_p \in V_n}\{\deg_{G_n}(v_p)\}\ \} = 2$ hold because $\deg_{G_n}(v_n) = 2$ always holds and $\deg_{G_n}(v_p) \ge 2$ always holds for any vertex $v_p \in V_n$.

Derive the following values. Note that the values may be given as mathematical expressions of n.

(1) $\max_{G_n \in \mathcal{G}_n}\{\ \max_{v_p \in V_n}\{\deg_{G_n}(v_p)\}\ \}$

(2) $\min_{G_n \in \mathcal{G}_n}\{\ \max_{p<q, v_p \in V_n, v_q \in V_n}\{\text{dist}_{G_n}(v_p, v_q)\}\ \}$

(3) $\max_{G_n \in \mathcal{G}_n}\{\ \max_{p<q, v_p \in V_n, v_q \in V_n}\{\text{dist}_{G_n}(v_p, v_q)\}\ \}$

F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 1　以下の問いに答えよ。

(1) 数列 $(8, 3, 4, 12, 10, 6, 9, 14, 1)$ の各要素をキーとして先頭から順に挿入した際にできる二分探索木を、図 1 のように図示せよ。一度挿入したキーは動かさないものとする。

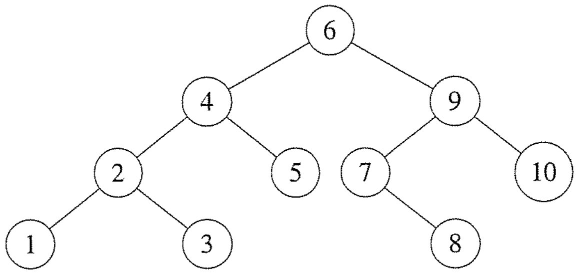


図 1: 二分探索木

(2) 図 1 の二分探索木からキー 6 を削除した二分探索木を図示せよ。

(3) (2) でできた二分探索木に再びキー 6 を挿入した時にできる二分探索木を図示せよ。

(4) 互いに異なる n 個の要素からなる数列が与えられたとき、これを格納する二分探索木を構成し、この木の節点を巡回する再帰関数により、数列の要素を昇順ソートすることを考える。この再帰関数を `traverse_tree(x)` とし、`x` をある節点とする。この時、`traverse_tree(x)` 内で、`x` が `NIL` でない限り呼び出される、以下の 3 つの関数呼び出しの正しい順序を答えよ。ただし、`x.left` は `x` の左の子節点、`x.right` は `x` の右の子節点とし、それぞれ存在しないときは `NIL` とする。

1. `traverse_tree(x.right)`
2. `traverse_tree(x.left)`
3. `print(x)`

(5) 互いに異なる n 個の要素からなる数列に対する (4) のソーティングアルゴリズムの最良実行時間計算量と最悪実行時間計算量を答えよ。

（次のページに続く）

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.1 Answer the following questions.

(1) Depict the binary search tree, in the same way as that shown in Fig. 1, constructed by inserting the keys prepared in a number list $(8, 3, 4, 12, 10, 6, 9, 14, 1)$ one by one from the first element. Note that once a key is inserted, it is not moved.

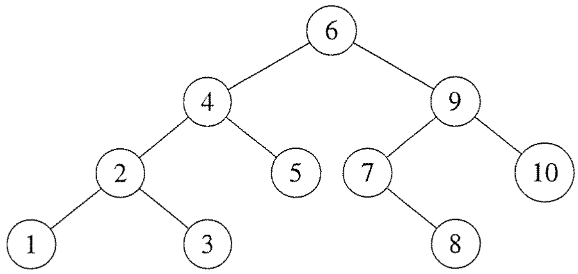


Fig. 1: Binary Search Tree

(2) Depict the binary search tree after deleting key 6 from the binary search tree shown in Fig. 1.

(3) Depict the binary search tree after re-inserting key 6 to the binary search tree made in (2).

(4) Given a list of n different numbers, consider sorting the numbers in ascending order by first constructing a binary search tree from the list and then using a recursive function that traverses the nodes of it. Let us refer to this recursive function as `traverse_tree(x)` and a node of the tree as `x`. Answer the correct order of the calls to the following three functions inside `traverse_tree(x)` when `x` is not `NIL`. Note that `x.left` is the left child node and `x.right` is the right child node of `x`, and each of them becomes `NIL` when it does not exist.

1. `traverse_tree(x.right)`
2. `traverse_tree(x.left)`
3. `print(x)`

(5) Answer the best-case time complexity order and worst-case time complexity order of the sorting algorithm in (4) for a list of n different numbers.

(continued on the next page)

設問 2　N 種類の品物 $1, 2, \ldots, N$ があり、それぞれの品物の重量は c_i（$i = 1, 2, \ldots, N$）であるとする。なお、c_i は正の整数であり、$c_1 = 1$ とする。また、それぞれの種類の品物は十分に多くあるとする。以下の問いに答えよ。なお、解答する式は定数時間で評価できるものでなければならない。

(1) $I[i, j]$ は、1 から i までの種類の品物をそれぞれ最大 1 つまで用いて、それらの合計重量をある非負の整数 j にできるかどうかを表すとする。可能であれば $I[i, j] = 1$、そうでなければ $I[i, j] = 0$ とする。このとき $I[i, j]$ を、$I[i, j]$ 以外の $I[i', j']$（ただし $i' \leq i, j' \leq j$）のうちのいくつかを用いて表せ。なお、境界条件は気にしなくてよい（つまり、$i \geq 2, j \geq \max\{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$ のみを考えてよいとする）。

(2) $S[i, j]$ は、1 から i までの種類の品物を好きなだけ用いて、合計重量をある非負の整数 j とするのに必要な品物の最小の個数とする。このとき $S[i, j]$ を、$S[i, j]$ 以外の $S[i', j']$（ただし $i' \leq i, j' \leq j$）のうちのいくつかを用いて表せ。なお、(1) と同様に、境界条件は気にしなくてよい。

(3) $P[i, j]$ は、1 から i までの種類の品物を好きなだけ用いて、合計重量をある非負の整数 j とする方法の数とする。このとき $P[i, j]$ を、$P[i, j]$ 以外の $P[i', j']$（ただし $i' \leq i, j' \leq j$）を用いて表せ。なお、同種の品物は区別しない。また、(1) と同様に、境界条件は気にしなくてよい。

Q.2 Assume that there are N types of items, $1, 2, \ldots, N$, and that the weight of each item is c_i ($i = 1, 2, \ldots, N$). Note that c_i is a positive integer and $c_1 = 1$. Also assume that there are a sufficient number of items of each type. Answer the following questions. Note that the solutions must be given as equations that can be evaluated in constant time.

(1) $I[i, j]$ denotes whether it is possible to make the total weight equal to a given non-negative integer j, using at most one item of each type from 1 to i. If possible, $I[i, j] = 1$, otherwise, $I[i, j] = 0$. Express $I[i, j]$ using some $I[i', j']$ (for $i' \leq i, j' \leq j$) other than $I[i, j]$. You do not need to care about boundary conditions (i.e., you only need to consider the cases where $i \geq 2, j \geq \max\{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$).

(2) $S[i, j]$ denotes the minimum number of items required to make the total weight equal to a given non-negative integer j, using as many items of each type from 1 to i as needed. Express $S[i, j]$ using some $S[i', j']$ (for $i' \leq i, j' \leq j$) other than $S[i, j]$. As in (1), you do not need to care about boundary conditions.

(3) $P[i, j]$ denotes the number of ways to make the total weight equal to a given nonnegative integer j, using as many items of each type from 1 to i as needed. Express $P[i, j]$ using some $P[i', j']$ (for $i' \leq i, j' \leq j$) other than $P[i, j]$. Note that there is no distinction between items of the same type. As in (1), you do not need to care about boundary conditions.

2024年度10月期入学 / 2025年度4月期入学
京都大学 大学院情報学研究科
修士課程 知能情報学コース / データ科学コース 入学者選抜試験問題
（専門科目）

2024年8月6日 12:00～14:00

【注意】

1. 問題冊子はこの表紙を含めて13枚ある。
2. 試験開始の合図があるまで中を見てはいけない。
3. 試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷の不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
4. 問題は下記6題であり、日本語と英語の両方で出題されている。
   知能情報学コースの受験生はS-1～S-6から、2題を選択し、解答しなさい。
   データ科学コースの受験生はS-1～S-4から、2題を選択し、解答しなさい。

5. 特に指定のない限り、日本語または英語で解答すること。
6. 解答用紙に記載されている注意事項についても留意すること。

October 2024 Admissions / April 2025 Admissions
Entrance Examination for Master's Program
Intelligence Science and Technology Course / Data Science Course
Graduate School of Informatics, Kyoto University
(Specialized Subjects)

August 6, 2024
12:00 - 14:00

NOTES

1. This is the Question Booklet in 13 pages including this front cover.
2. Do not open the booklet until you are instructed to start.
3. After the examination has started, check the number of pages and notify proctors (professors) immediately if you find missing pages or unclear printings.
4. There are 6 questions, written in Japanese and English. The questions are classified as listed below.
   Examinees of Intelligence Science and Technology Course must choose 2 questions from S-1~S-6 and answer them.
   Examinees of Data Science Course must choose 2 questions from S-1~S-4 and answer them.

5. Write your answer in Japanese or English, unless otherwise specified.
6. Read carefully the notes on the Answer Sheets as well.

設問 1　確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が次で与えられるとする。

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ cx(3-x) & (0\leq x<3)\\ 0 & (3\leq x)\end{cases}$$

c はある正の定数である $(c>0)$。

(1) 定数 c の値を求めよ。

(2) 確率変数 X の平均と分散を求めよ。

設問 2　X と Y はそれぞれ二項分布 $\mathrm{B}(m,p)$ と $\mathrm{B}(n,p)$ に従う互いに独立な確率変数とする。$Z=X+Y$ が従う分布を導出せよ。

設問 3　母分散が等しい正規母集団 A と B を考える。正規母集団 A から得られたサイズ 18 の標本 $(x_1,x_2,\ldots,x_{18})$ と正規母集団 B から得られたサイズ 18 の標本 $(y_1,y_2,\ldots,y_{18})$ がある。標本から得られた統計量は以下の通りである。

$$\bar{x}=\frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18}x_i \qquad s_x^2=\frac{1}{17}\sum_{i=1}^{18}(x_i-\bar{x})^2$$

$$\bar{y}=\frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18}y_i \qquad s_y^2=\frac{1}{17}\sum_{i=1}^{18}(y_i-\bar{y})^2 \qquad s_{xy}=\frac{1}{17}\sum_{i=1}^{18}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$

自由度 17、34 の t 分布の上側 2.5% 点の値として、それぞれ 2.110、2.032 を用いてもよい。

(1) 標本には対応があり、対 $(x_i,y_i), i=1,2,\ldots,18$ として無作為に得られていると仮定して、上記の統計量のうち必要なものを使って母平均の差に関する 95% 信頼区間を求めよ。

(2) 標本には対応がなく、それぞれの母集団から無作為に得られていると仮定して、上記の統計量のうち必要なものを使って母平均の差に関する 95% 信頼区間を求めよ。

設問 4　確率変数 $Y_i\ (i=1,2,\ldots,16)$ の変動を対応する定数 $x_i\ (i=1,2,\ldots,16)$ で説明する線形回帰モデル $Y_i=\alpha+\beta x_i+\epsilon_i\ (i=1,2,\ldots,16)$ を考える。ここで α と β は回帰係数である。$\epsilon_i\ (i=1,2,\ldots,16)$ は独立で、平均 0、分散 σ^2 の正規分布 $\mathrm{N}(0,\sigma^2)$ に従うとする。また、$\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ をそれぞれ α と β の最小二乗推定量とする。

(1) $\hat{\beta}$ の標準偏差を求めよ。

(2) 新たな定数 x_{17} が与えられたとき、$Y_{17}=\alpha+\beta x_{17}+\epsilon_{17}$ の 95% 予測区間を $\hat{\alpha}$、$\hat{\beta}$、σ、$x_1,x_2,\ldots,x_{17}$ を用いて表せ。ただし ϵ_{17} は $\epsilon_i\ (i=1,2,\ldots,16)$ と独立で正規分布 $\mathrm{N}(0,\sigma^2)$ に従うとする。自由度 14 の t 分布の上側 2.5% 点の値として 2.145 を用いてもよい。

Q.1 Suppose the probability density function $f(x)$ of a random variable X is as follows.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ cx(3-x) & (0 \le x < 3) \\ 0 & (3 \le x) \end{cases}$$

c is a positive constant $(c > 0)$.

(1) Compute the value of the constant c.

(2) Compute the mean and variance of the random variable X.

Q.2 Let X and Y be independent random variables following the binomial distributions $\mathrm{B}(m, p)$ and $\mathrm{B}(n, p)$, respectively. Derive the distribution of $Z = X + Y$.

Q.3 Consider normal populations A and B with a common population variance. One sample of size 18 is selected from the normal population A, denoted as $(x_1, x_2, \ldots, x_{18})$, and the other one of size 18 from the normal population B, denoted as $(y_1, y_2, \ldots, y_{18})$. The statistics derived from the samples are as follows.

$$\bar{x} = \frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18} x_i \qquad s_x^2 = \frac{1}{17}\sum_{i=1}^{18}(x_i - \bar{x})^2$$

$$\bar{y} = \frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18} y_i \qquad s_y^2 = \frac{1}{17}\sum_{i=1}^{18}(y_i - \bar{y})^2 \qquad s_{xy} = \frac{1}{17}\sum_{i=1}^{18}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

The values 2.110 and 2.032 may be used for the upper 2.5% point of the t-distribution with 17 and 34 degrees of freedom, respectively.

(1) Assuming that the samples are paired as (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, 18$ and randomly selected, compute the 95% confidence interval for the difference between the two population means using necessary statistics among those mentioned above.

(2) Assuming that the samples are unpaired and randomly selected from each population, compute the 95% confidence interval for the difference between the two population means using necessary statistics among those mentioned above.

Q.4 Consider a linear regression model $Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 16)$ where the variation in random variables Y_i $(i = 1, 2, \ldots, 16)$ are explained by the corresponding constants x_i $(i = 1, 2, \ldots, 16)$ with the regression coefficients of α and β. Assume that ϵ_i $(i = 1, 2, \ldots, 16)$ are independent and follow a normal distribution $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$ with mean 0 and variance σ^2. Let $\hat{\alpha}$ and $\hat{\beta}$ be the least squares estimators of α and β, respectively.

(1) Compute the standard deviation of $\hat{\beta}$.

(2) Given a new constant x_{17}, show the 95% prediction interval of $Y_{17} = \alpha + \beta x_{17} + \epsilon_{17}$ using $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, σ, and $x_1, x_2, \ldots, x_{17}$ where ϵ_{17} is independent of ϵ_i $(i = 1, 2, \ldots, 16)$ and follows a normal distribution $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$. The value 2.145 for the upper 2.5% point of the t-distribution with 14 degrees of freedom may be used.

設問　各成分が0または1のいずれかの値をとる3次元のベクトルを、クラス1またはクラス2のいずれかに分類する問題を考える。ベクトルを $\boldsymbol{x} = (x(1), x(2), x(3)) \in \{0,1\}^3$ とする。クラス $y = k\ (k \in \{1,2\})$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ の各成分は独立にベルヌーイ分布に従うとし、$x(j) = 1$ となる確率を $p(x(j) = 1|y = k) = \mu^{(k)}(j)\ (0 \leq \mu^{(k)}(j) \leq 1,\ j \in \{1,2,3\})$ とする。クラス k のパラメータをまとめて $\boldsymbol{\mu}^{(k)} = (\mu^{(k)}(1), \mu^{(k)}(2), \mu^{(k)}(3))$ とする。
N 個のデータからなるデータセットを $\mathcal{D} = \{(\boldsymbol{x}_1, y_1), (\boldsymbol{x}_2, y_2), \ldots, (\boldsymbol{x}_N, y_N)\}$ とする。i 番目のデータのベクトルを $\boldsymbol{x}_i = (x_i(1), x_i(2), x_i(3))$ とし、$\boldsymbol{x}_i$ のクラスを y_i とする。$y_i = k$ であるようなデータのベクトル $\boldsymbol{x}_i\ (i \in \{1, \ldots, n\})$ は、パラメータ $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ をもつ前述の分布から独立に観測されるとする。

(1)　クラス k の事前確率を $p(y = k)$ とする。$\boldsymbol{x}$ のクラスの推定値 $\hat{y}$ を事後確率の比較により決定する。すなわち、$p(y = 1|\boldsymbol{x}) \geq p(y = 2|\boldsymbol{x})$ ならば $\hat{y} = 1$ とし、そうでない場合は $\hat{y} = 2$ とする。このとき、$\boldsymbol{x}$ のクラスの推定値 $\hat{y}$ を決定する規則を $p(y = k)$ と $\mu^{(k)}(j)$ を用いて示せ。

(2)　データセット $\mathcal{D}$ の部分集合を $\mathcal{D}^{(k)} = \{(x_i, y_i) \in \mathcal{D} \mid y_i = k\}\ (k \in \{1,2\})$ とする。データセット $\mathcal{D}$ から $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ の最尤推定値 $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}$ を導出し、$\mathcal{D}^{(k)}$ を用いて表せ。

(3)　データセット $\mathcal{D}$ が表1で与えられたとする。表1から最尤推定値 $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}\ (k \in \{1,2\})$ の値を求めよ。

表1: データセット

i	$\boldsymbol{x}_i$	y_i
1	(1,0,0)	1
2	(1,0,1)	1
3	(1,1,0)	2
4	(0,1,0)	1
5	(0,0,1)	2

(4)　事前確率を $p(y = 1) = \frac{3}{5}$、$p(y = 2) = \frac{2}{5}$ とする。(1) で示した規則の $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ に (3) で求めた $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}$ を代入し、$\boldsymbol{x} = (1,1,1)$ のクラスの推定値 $\hat{y}$ を求めよ。

(5)　事前確率 $p(y = 1)$ を $q\ (0 \leq q \leq 1)$ とする。(1) で示した規則の $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ に (3) で求めた $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}$ を代入し、$\boldsymbol{x} = (1,1,1)$ を分類する。q とクラスの推定値 $\hat{y}$ の関係を述べよ。

Q We consider a problem of classifying a three-dimensional vector, where a value of each element is either 0 or 1, into either the class 1 or the class 2. Let $\boldsymbol{x} = (x(1), x(2), x(3)) \in \{0,1\}^3$ be a vector. Assume that each element of $\boldsymbol{x}$ of the class $y = k$ $(k \in \{1,2\})$ independently follows a Bernoulli distribution, and let $p(x(j) = 1 | y = k) = \mu^{(k)}(j)$ $(0 \le \mu^{(k)}(j) \le 1,\ j \in \{1,2,3\})$ be the probability of $x(j) = 1$. Let $\boldsymbol{\mu}^{(k)} = (\mu^{(k)}(1), \mu^{(k)}(2), \mu^{(k)}(3))$ be parameters of the class k.
Let $\mathcal{D} = \{(\boldsymbol{x}_1, y_1), (\boldsymbol{x}_2, y_2), \ldots, (\boldsymbol{x}_N, y_N)\}$ be a data set consisting of N data. Let $\boldsymbol{x}_i = (x_i(1), x_i(2), x_i(3))$ be the vector of the i-th data, and y_i be the class of $\boldsymbol{x}_i$. We assume that $\boldsymbol{x}_i$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ of the class $y_i = k$ is independently observed from the aforementioned distribution whose parameter is $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$.

(1) Let $p(y = k)$ be a prior probability for the class k. We determine an estimated class $\hat{y}$ of $\boldsymbol{x}$ by comparing the posterior probabilities. Namely, we set $\hat{y} = 1$ if $p(y = 1|\boldsymbol{x}) \ge p(y = 2|\boldsymbol{x})$; otherwise we set $\hat{y} = 2$. Show a rule that assigns $\boldsymbol{x}$ to an estimated class $\hat{y}$ by using $p(y = k)$ and $\mu^{(k)}(j)$.

(2) Let $\mathcal{D}^{(k)} = \{(x_i, y_i) \in \mathcal{D} \mid y_i = k\}$ $(k \in \{1,2\})$ be a subset of the data set $\mathcal{D}$. By using $\mathcal{D}^{(k)}$, derive the maximum likelihood estimate $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}$ of $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ from the data set $\mathcal{D}$.

(3) Assume that a data set $\mathcal{D}$ is given in Table 1. Compute the values of the maximum likelihood estimates $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}$ $(k \in \{1,2\})$ from Table 1.

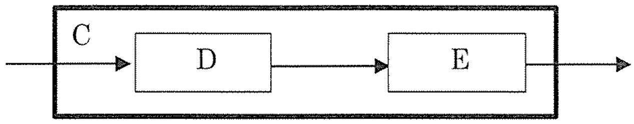
Table 1: A data set

i	$\boldsymbol{x}_i$	y_i
1	(1,0,0)	1
2	(1,0,1)	1
3	(1,1,0)	2
4	(0,1,0)	1
5	(0,0,1)	2

(4) Let prior probabilities be $p(y = 1) = \frac{3}{5}$ and $p(y = 2) = \frac{2}{5}$. Compute the estimated class $\hat{y}$ of $\boldsymbol{x} = (1,1,1)$ by substituting $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}$ computed in (3) for $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ of the rule shown in (1).

(5) Let a prior probability $p(y = 1)$ be q $(0 \le q \le 1)$. We classify $\boldsymbol{x} = (1,1,1)$ by substituting $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}$ computed in (3) for $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ of the rule shown in (1). Explain the relation between q and an estimated class $\hat{y}$.

設問 1　離散的無記憶通信路 C は２つの離散的無記憶通信路 D、E が下図のように直列に接続されて構成されている。



通信路 D の入力アルファベットは$\Sigma_a = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$である。通信路 D の出力アルファベットと通信路 E の入力アルファベットは$\Sigma_b = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$である。通信路 E の出力アルファベットは$\Sigma_c = \{c_1, c_2\}$である。アルファベット$\Sigma_a$上の確率変数を$X$、$\Sigma_b$上の確率変数を$Y$、$\Sigma_c$上の確率変数を$Z$とするとき、通信路 D、E の通信路行列が、それぞれ以下の$p(Y|X)$と$q(Z|Y)$で与えられている。

$$p(Y|X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad q(Z|Y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ。

(1) 通信路 D の通信路容量を求めよ。

(2) 確率変数Xが従う確率分布$r(a_i)$が以下のように与えられるときの相互情報量$I(X;Z)$を求めよ。導出過程も示すこと。

$$r(a_1) = r(a_3) = \frac{1}{2} \qquad r(a_2) = r(a_4) = 0$$

設問 2　集合$\{0,\ 1\}$の要素に対する演算として論理積(AND)と排他的論理和(XOR) $\oplus$だけを考える。語とは$\{0,\ 1\}^k$ $(k \geq 1)$の要素であり、行ベクトルで表現されるとする。k行n列$(k, n \geq 1)$の生成行列Gを用いて、語$\boldsymbol{w} \in \{0,\ 1\}^k$ から符号語 $\boldsymbol{x} \in \{0,\ 1\}^n$を$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}G$のように構成する線形符号を考える。$C(G) = \{\boldsymbol{w}G \mid \boldsymbol{w} \in \{0,\ 1\}^k\}$ とするとき、以下の問いに答えよ。

(1) 任意の$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y} \in C(G)$に対して $\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} \in C(G)$ であることを示せ。ここで$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}$は、行ベクトル$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$の成分ごとの排他的論理和をとって得られる行ベクトルとする。

(2) 集合$C(G)$に対して次の等式を証明せよ。

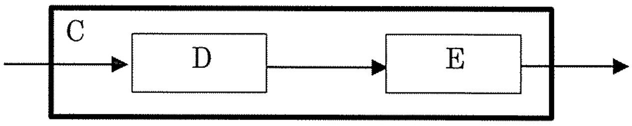
$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in C(G) \text{ and } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}} d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \min_{\boldsymbol{x} \in C(G) \text{ and } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$$

ここでdは Hamming 距離であり、$\boldsymbol{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ である。

(3) 次の生成行列G に対して、$G' = GF$が組織符号の生成行列になるようなn行n列の行列Fを与えよ。さらにFとG'を用いて$C(G)$のパリティ検査行列Hを求めよ。

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.1 A discrete memoryless channel C consists of two discrete memoryless channels D and E, which are connected serially as shown in the following figure.



The input alphabet of D is $\Sigma_a = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Both of the output alphabet of D and the input alphabet of E are $\Sigma_b = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. The output alphabet of E is $\Sigma_c = \{c_1, c_2\}$. Let random variables $X, Y,$ and Z be respectively on Σ_a, Σ_b, and Σ_c. The channel transition matrix $p(Y|X)$ for D and the channel transition matrix $q(Z|Y)$ for E are given as

$$p(Y|X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad q(Z|Y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Answer the following questions.

(1) Compute the channel capacity of D.

(2) Assume that X follows the probability distribution $r(a_i)$ given below. Compute the mutual information $I(X;Z)$. You must show its derivation.

$$r(a_1) = r(a_3) = \frac{1}{2}, \quad \text{and} \quad r(a_2) = r(a_4) = 0.$$

Q.2 We consider only the AND operation and the XOR (exclusive or) operation $\oplus$ for the elements in $\{0, 1\}$. We define a *word* as an element in $\{0, 1\}^k$ $(k \geq 1)$, each of which is represented as a row vector. Consider the liner codes generated with a matrix G of k rows and n columns $(k, n \geq 1)$ as $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}G$, where $\boldsymbol{w} \in \{0, 1\}^k$ is a word and $\boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^n$ is a codeword. Let $C(G) = \{\boldsymbol{w}G \mid \boldsymbol{w} \in \{0, 1\}^k\}$. Answer the following questions.

(1) Show that $\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} \in C(G)$ holds for all $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C(G)$, where $\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}$ is the row vector obtained by element-wise XOR of two row vectors $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$.

(2) For the set $C(G)$, prove that

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in C(G) \text{ and } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}} d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \min_{\boldsymbol{x} \in C(G) \text{ and } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}),$$

where d is the Hamming distance and $\boldsymbol{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

(3) For the case that G is given below, find a matrix F of n rows and n columns such that $G' = GF$ generates a systematic code. Moreover, by using the matrices F and G', compute the parity check matrix H for $C(G)$.

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

実関数 $x(t)$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}[x(t)]$、および、関数 $X(\omega)$ の逆フーリエ変換 $\mathcal{F}^{-1}[X(\omega)]$ を以下の式で与える。ただし、t, ω は実数、$j=\sqrt{-1}$ とする。

$$\mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

以下の設問に答えよ。ただし、T_0, ω_0, T は正の定数とする。

設問 1　実関数 $f(t), g(t)$ に対して以下の等式が成り立つことを証明せよ。$*$ は畳み込みを示す。

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f(t)] * \mathcal{F}[g(t)]$$

設問 2　以下の関数のフーリエ変換を求めよ。

(1) $x_1(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{sgn}(T_0 - t) + \mathrm{sgn}(T_0 + t))$

ただし、 $\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & (t < 0) \\ 0 & (t = 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases}$

(2) $x_2(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin \omega_0 t}{\pi t} & (t \neq 0) \\ \dfrac{\omega_0}{\pi} & (t = 0) \end{cases}$

設問 3　くし型関数 $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ を用いて、設問 2 の $x_2(t)$ をサンプリングした信号 $x_s(t, T) = x_2(t)\delta_T(t)$ について、以下の問いに答えよ。ただし、$\delta(t)$ はディラックのデルタ関数を示す。$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{k}{T})$ が成り立つことを用いても良い。

(1) $\mathcal{F}[x_s(t, \frac{1}{3\omega_0})]$ を $|\omega| \leq 3\omega_0$ の範囲で図示せよ。

(2) $|\omega| \leq \omega_0$ において $\mathcal{F}[x_2(t)] = \mathcal{F}[x_s(t, T)]$ を満たすための T の条件を示せ。

(3) $\mathcal{F}[x_s(t, \frac{2}{3\omega_0})]$ を $|\omega| \leq 3\omega_0$ の範囲で図示せよ。

(4) $X_s(\omega)$ を以下のように与える。$\mathcal{F}^{-1}[X_s(\omega)]$ を $|t| \leq \frac{\pi}{\omega_0}$ の範囲で図示せよ。

$$X_s(\omega) = \begin{cases} \mathcal{F}[x_s(t, \frac{2}{3\omega_0})] & (|\omega| \leq \omega_0) \\ 0 & (|\omega| > \omega_0) \end{cases}$$

Let us define the Fourier transform $\mathcal{F}[x(t)]$ of a real function $x(t)$ and the inverse Fourier transform $\mathcal{F}^{-1}[X(\omega)]$ of a function $X(\omega)$ with the following formulas, where t and ω denote real numbers, and $j = \sqrt{-1}$.

$$\mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Answer the following questions, where T_0, ω_0, and T denote positive constants.

Q.1 Prove that the following equation holds for real functions $f(t)$ and $g(t)$, where $*$ denotes convolution.

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f(t)] * \mathcal{F}[g(t)]$$

Q.2 Compute the Fourier transform of the functions given below.

(1) $x_1(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{sgn}(T_0 - t) + \mathrm{sgn}(T_0 + t))$,

where $\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & (t < 0) \\ 0 & (t = 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases}$

(2) $x_2(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin \omega_0 t}{\pi t} & (t \neq 0) \\ \dfrac{\omega_0}{\pi} & (t = 0) \end{cases}$

Q.3 Let $x_s(t, T) = x_2(t)\delta_T(t)$ be a signal sampled from $x_2(t)$ in Q.2 using a comb function $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$, where $\delta(t)$ denotes the Dirac delta function. Answer the following questions. You may use that $\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{k}{T})$ holds.

(1) Draw the graph of $\mathcal{F}[x_s(t, \frac{1}{3\omega_0})]$ in the range of $|\omega| \leq 3\omega_0$.

(2) Show the condition for T to satisfy $\mathcal{F}[x_2(t)] = \mathcal{F}[x_s(t, T)]$ in the range of $|\omega| \leq \omega_0$.

(3) Draw the graph of $\mathcal{F}[x_s(t, \frac{2}{3\omega_0})]$ in the range of $|\omega| \leq 3\omega_0$.

(4) Draw the graph of $\mathcal{F}^{-1}[X_s(\omega)]$ in the range of $|t| \leq \frac{\pi}{\omega_0}$. $X_s(\omega)$ is given below.

$$X_s(\omega) = \begin{cases} \mathcal{F}[x_s(t, \frac{2}{3\omega_0})] & (|\omega| \leq \omega_0) \\ 0 & (|\omega| > \omega_0) \end{cases}$$

設問　決定性有限状態オートマトン $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を考える。ここで、Q は有限の状態集合、Σ は有限の文字集合、$\delta : Q \times \Sigma \to Q$ は遷移関数、$q_0 \in Q$ は開始状態、$F \subseteq Q$ は受理状態の集合である。また、$\epsilon \in \Sigma^*$ を空文字列とする。
$\Sigma = \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ とする。$w \in \Sigma^*$ に対して、$n(w)$ は w が表す整数を返すとする。例えば、$n(52) = 52, n(068) = 68$ である。ϵ に対しては $n(\epsilon) = 0$ と定義する。

(1) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid n(w) \equiv 0 \pmod 2\}$ を受理する決定性有限状態オートマトン ($|Q| \leq 2$) の状態遷移図を示せ。

(2) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid n(w) \equiv 0 \pmod 3\}$ を受理する決定性有限状態オートマトン ($|Q| \leq 3$) の状態遷移図を示せ。

(3) 任意の $k \geq 2$ について $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid n(w) \equiv 0 \pmod k\}$ を受理する決定性有限状態オートマトンの Q, δ, F を示せ。ただし、δ の記述に mod を用いても良い。

(4) $L_4 = \{w \in \Sigma^+ \mid h(w) \neq 0 \text{ or } w = 0\}$ とする。ここで $h(w)$ は文字列 w の先頭の文字を返す。任意の $k \geq 2$ について $L_3 \cap L_4$ を受理する決定性有限状態オートマトンの Q, δ, F を示せ。ただし、δ の記述に mod を用いても良い。

Q Consider deterministic finite state automata $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, where Q is a finite set of states, Σ is a finite set of characters, $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ is a transition function, $q_0 \in Q$ is a start state, and $F \subseteq Q$ is a set of accept states. Also, $\epsilon \in \Sigma^*$ denotes the empty string.

Let $\Sigma = \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$. For $w \in \Sigma^*$, $n(w)$ returns an integer number represented by w. For example, $n(52) = 52$ and $n(068) = 68$. For ϵ, we define $n(\epsilon) = 0$.

(1) Depict the state transition diagram of a deterministic finite state automaton ($|Q| \leq 2$) that accepts $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid n(w) \equiv 0 \pmod 2\}$.

(2) Depict the state transition diagram of a deterministic finite state automaton ($|Q| \leq 3$) that accepts $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid n(w) \equiv 0 \pmod 3\}$.

(3) Show Q, δ, and F of a deterministic finite state automaton that accepts $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid n(w) \equiv 0 \pmod k\}$ for any $k \geq 2$. You may use mod to describe δ.

(4) Let $L_4 = \{w \in \Sigma^+ \mid h(w) \neq 0 \text{ or } w = 0\}$, where $h(w)$ returns the first character of string w. Show Q, δ, and F of a deterministic finite state automaton that accepts $L_3 \cap L_4$ for any $k \geq 2$. You may use mod to describe δ.

設問１　人を対象とした認知実験において fMRI (functional magnetic resonance imaging) と EEG (electroencephalography)を使って脳活動を同時に計測することの長所について、一方しか行わない場合と比べて説明せよ。

設問２　次の６つの神経科学、心理学の用語の中から<u>４つ</u>を選択し、それぞれについて、(a) 定義、(b) これまでの研究から明らかになっていることについて説明せよ。なお、図を用いても良い。

① Biological motion perception
② Color constancy
③ Early selection and late selection of attention
④ Somatic marker hypothesis
⑤ Visuo-spatial short-term memory (visual working memory)
⑥ Intentional binding

Q.1 Explain the advantages of simultaneously measuring brain activity using fMRI (functional magnetic resonance imaging) and EEG (electroencephalography) in cognitive experiments on humans, compared to measuring brain activity using only one of them.

Q.2 Choose <u>four</u> of the following six terms in neuroscience and psychology, and explain (a) the definition and (b) what has been revealed by previous research for each term. Figures may be used.

① Biological motion perception
② Color constancy
③ Early selection and late selection of attention
④ Somatic marker hypothesis
⑤ Visuo-spatial short-term memory (visual working memory)
⑥ Intentional binding