２０２３年度１０月期入学 / ２０２４年度４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

情報学専攻システム科学コース

入学者選抜　試験問題

【数学】

試験日時：２０２３年８月７日（月）　午前１０時００分より正午まで

問題冊子頁数（表紙、中表紙、裏表紙を除いて）：　４頁

注意：

（１）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（２）問題番号【Ｉ】の問１、問２、問３、問題番号【Ⅱ】の問１、問２のそれぞれについて別の解答用紙を使用して解答すること。その際、各解答用紙に試験科目名、問題番号【Ｉ】の問１，問２、問３、問題番号【Ⅱ】の問１、問２を忘れずに記入すること。

（３）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること）

（４）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

中表紙

【数学】

【I】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

【I】においては，ベクトルの転置を記号 T を用いて表す．例えば，ベクトル x の転置は $x^{\top}$ と記される．

問 1　以下の設問に答えよ．

(i)　次式を満たす実数の組 (x_1, x_2, x_3, x_4) が唯一存在するならば，その x_3 の値を示せ．等式を満たす実数の組が唯一でない場合は「唯一でない」，存在しない場合は「存在しない」と答えよ．

$$x_1 \begin{bmatrix} 11 \\ 11 \\ -11 \\ -11 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 12 \\ -12 \\ 12 \\ -12 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 31 \\ 31 \\ 31 \\ 31 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 41 \\ -41 \\ -41 \\ 41 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ -11 \\ -51 \\ 37 \end{bmatrix}$$

(ii)　次の行列は重複を含め 4 つの固有値を有する．いま，それら 4 つの固有値の和が 23 だという．これを満たすような実数の組 (x, y) を，横軸を x，縦軸を y とする座標平面にプロットせよ．

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2.5 \\ -1 & 4 & -7 & 0.5 \\ 1 & -7 & 4 & y \\ 2.5 & 0.5 & y & x \end{bmatrix}$$

問 2　以下の設問に答えよ．

(i)　次の行列 A の行列式 $\det A$ の最大値を求めよ．ただし，s と t は実数とする．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+s & 1 \\ 1+s & 1 & 1+t \\ 1 & 1+t & 1 \end{bmatrix}$$

(ii)　次式を満たす実正方行列 B は存在するか．理由とともに答えよ．

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

（数学の問題は次ページに続く）

問3　ベクトル x と y の内積が $x^\top y$ で与えられる3次元実数ベクトル空間 V における2次元部分空間 V_1 とその直交補空間 V_2 について考える．V_1 の基底は a と b，V_2 の基底は c であり，a と c は次式で与えられるとする．以下の設問に答えよ．

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(i)　実数 k を求めよ．さらに，a と直交する基底 b をひとつ求めよ．

(ii)　部分空間 V_1 への正射影 p について，その射影行列 P を求めよ．また，P の階数（ランク）を求めよ．

(iii)　部分空間 V_2 への正射影 q について，その射影行列 Q を求めよ．また，q の核（カーネル）を求めよ．

(iv)　次式で与えられる x とのユークリッド距離 d が最も小さくなる部分空間 V_1 の元 y を，a と設問 (i) で求めた b の線形結合として求めよ．また，そのときの d を求めよ．

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

（数学の問題は次ページに続く）

【数学】(続き)

【II】

注意：問 1，問 2 はそれぞれ別の解答用紙に解答すること．

$\mathbb{R}$ を実数全体からなる集合，π を円周率とする．行列およびベクトルの転置を $\top$ で表す．

問 1　以下の設問に答えよ．

(i) 変数 $x > 0$ に対して関数 $f(x) = \frac{1}{x^m} a^{-\frac{1}{x}}$ を考える．$f(x)$ の x に関する最大値が存在するならばそのときの x を求めよ．存在しない場合はそのことを示せ．ただし，m は正の整数，$a > 1$ は定数とする．

(ii) 条件 $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$, $x_i > 0$ $(i = 1, \ldots, N)$ の下で $-\sum_{i=1}^{N} x_i \log x_i$ の最大値を求めよ．ただし，N は正の整数とする．

(iii) 原点を O とする xy 平面上の曲線 A: $x = a\cos^3\theta, y = b\sin^3\theta$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ を考える．ここで，曲線 A 上の点 (x_0, y_0) における接線と x 軸および y 軸との交点をそれぞれ点 $P(p, 0)$ および点 $Q(0, q)$ とする．ただし，a, b $(a > 0, b > 0)$ は定数とする．

(a) p, q を a, b, x_0, y_0 を用いて表せ．

(b) 接点 (x_0, y_0) を動かしたときの，原点 O と点 P および点 Q の 3 点を頂点とする三角形の面積の最大値とそのときの接点に対応する θ の値を求めよ．

(数学の問題は次ページに続く)

問 2　以下の設問に答えよ.

(i) 次の極限を求めよ. 極限が存在しない場合, そのことを示せ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1+2x+3^x)^{1/x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin\frac{1}{x}}{x}$

(ii) $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x)$ を微分可能な実関数とし, その導関数を $f'(x)$ で表す. また, 2 次元実ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = (f(x_1), f(x_2))^\top$ および $f'(\boldsymbol{x}) = (f'(x_1), f'(x_2))^\top$ と定義する.

また, 整数 $L \geq 2$ および $(L-1)$ 個の 2×2 実行列 $A^{(1)}, \ldots, A^{(L-1)} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ に対して, 実ベクトル $\boldsymbol{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)})^\top, \ldots, \boldsymbol{x}^{(L)} = (x_1^{(L)}, x_2^{(L)})^\top \in \mathbb{R}^2$ が全ての $\ell \in \{1, \ldots, L-1\}$ について $\boldsymbol{x}^{(\ell+1)} = f(A^{(\ell)}\boldsymbol{x}^{(\ell)})$ という関係を満たすものとする.

これ以降 $i, j \in \{1, 2\}$, $\ell \in \{1, \ldots, L-1\}$ とする. $\boldsymbol{x}^{(\ell+1)}$ を $\boldsymbol{x}^{(\ell)}$ の関数とみなすときの $x_i^{(\ell+1)}$ の $x_j^{(\ell)}$ に関する偏微分を $u_{i,j}^{(\ell)} = \dfrac{\partial x_i^{(\ell+1)}}{\partial x_j^{(\ell)}}$, $\boldsymbol{x}^{(L)}$ を $\boldsymbol{x}^{(\ell)}$ の関数とみなすときの $x_i^{(L)}$ の $x_j^{(\ell)}$ に関する偏微分を $v_{i,j}^{(\ell)} = \dfrac{\partial x_i^{(L)}}{\partial x_j^{(\ell)}}$ で表し, これらを (i, j) 成分にもつ 2×2 行列をそれぞれ $U^{(\ell)}, V^{(\ell)}$ とする. また $V^{(L)}$ を 2×2 単位行列とする.

以下, $A^{(\ell)}$ の (i, j) 成分を $a_{i,j}^{(\ell)}$ と表記する. なお, 必要に応じて $A^{(\ell)}$ の第 i 行を $\boldsymbol{a}_i^{(\ell)}$ と表記してよい. また, 実ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して $\boldsymbol{x}$ を対角成分にもつ対角行列を返す関数 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$ を用いてもよい.

(1) $U^{(\ell)}$ を $\{A^{(m)}\}_{m=1}^{L-1}, \{\boldsymbol{x}^{(m)}\}_{m=1}^{L}$ およびそれらの成分と f' のうち必要なものを用いて表せ.

(2) $V^{(\ell)}$ を $V^{(\ell+1)}, \{A^{(m)}\}_{m=1}^{L-1}, \{U^{(m)}\}_{m=1}^{L-1}, \{\boldsymbol{x}^{(m)}\}_{m=1}^{L}, f'$ のうち必要なものを用いて表せ.

(3) $k \in \{1, 2\}$ とする. $x_k^{(L)}$ を $(A^{(1)}, \ldots, A^{(L-1)})$ の関数とみなすときの $\dfrac{\partial x_k^{(L)}}{\partial a_{i,j}^{(\ell)}}$ の値を $\{V^{(m)}\}_{m=1}^{L}, \{A^{(m)}\}_{m=1}^{L-1}, \{\boldsymbol{x}^{(m)}\}_{m=1}^{L}$ およびそれらの成分と f' のうち必要なものを用いて表せ.

(数学の問題はここまで)

裏表紙

２０２３年度１０月期入学 / ２０２４年度４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

情報学専攻システム科学コース

入学者選抜 試験問題

【専門科目】

試験日時：２０２３年８月７日（月）　午後１時００分より同４時００分

問題冊子頁数（表紙、中表紙、裏表紙を除いて）：　８頁

選択科目：下記の科目のうち、２科目を選択し解答すること。

【複素関数論】（３）	【確率統計】（３）
【制御工学】　（３）	【信号処理】（３）

なお（ ）内数字は解答用紙の最大使用枚数を示す。

注意：

（１）上記科目から２科目を超えて選択してはいけない。３科目以上選択した場合は、本専門科目の答案を無効にすることがある。<u>別紙の選択表への記入を忘れないこと</u>。

（２）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（３）解答は上記最大使用枚数に注意すること。対応する解答用紙に解答中の科目名を明記すること。なお各問題に注意書きがあればそれに従うこと。

（４）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること。）

（５）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

中表紙

【複素関数論】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

以下の設問においては，i で虚数単位，π で円周率，e でネイピア数（自然対数の底）を表す．

問題 1　以下の設問に答えよ．

(1) 複素変数 z に関するつぎの方程式を考える．この方程式の解を $a+bi$ の形式（a と b は実数）ですべて求めよ．

$$\sum_{n=1}^{5} z^n = -1$$

(2) 領域 D 上で定義された複素変数 z の関数 $f(z)$ を考える．f が D 上で正則であり，D 内のある単一閉曲線 C とその内部の点 a に対して以下が成り立つと仮定する．

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

このとき，関数 f の点 a における微分係数 $f'(a)$ に関して以下の関係が成立するか否かについて答えよ．また，成立する場合は複素関数の微分係数の定義に基づいた証明を与え，成立しない場合は反例を与えよ．

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

（複素関数論の問題は次ページに続く）

【複素関数論】（続き）

問題 2　複素変数 z の関数

$$f(z) = \frac{e^z}{z-1}$$

について，以下の設問に答えよ．

(1) $|z-1| > 0$ の領域において，$f(z)$ の $z=1$ を中心としたローラン級数展開

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-1)^{-n}$$

を考える．$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を求めよ．また $z=1$ における留数を求めよ．

(2) $|z| > 1$ の領域において，$f(z)$ の $z=0$ を中心としたローラン級数展開

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^{-k}$$

を考える．d_1 を求めよ．

(3) $|z| < 1$ の領域において，設問 (2) と同様の形の $f(z)$ のローラン級数展開を考える．この場合，$d_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ が成り立つ理由を示せ．また，設問 (1) における $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ との間に次の関係式

$$c_k = \frac{1}{k!} \left\{ \sum_{n=k}^{\infty} a_n (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (-1)^n \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} \right\} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

が成り立つことを証明せよ．

問題 3　複素平面における曲線 ∂D を区分的になめらかなジョルダン曲線とし，その内部を D とする．$z \in \bar{D} = D \cup \partial D$ に対する関数 $f(z), g(z)$ が $\bar{D}$ において正則であると仮定する．このとき，∂D 上の各点 z において $|f(z)| > |g(z)|$ が成り立つならば，$f(z)$ と $f(z) + g(z)$ は D に同じ個数の零点を持つ．ただし m 位の零点の個数は m 個と数えるものとする．これをルーシェの定理と呼ぶ．これを踏まえ，以下の設問に答えよ．

(1) 複素変数 z に対する関数 $8z^3 - 6z^2 + z$ の零点のうち，$|z| < 1$ を満たすものの個数を求めよ．

(2) 複素変数 z に対する関数 $z^6 - 10z^2 + z + 1$ の零点のうち，$1 \leq |z| < 2$ を満たすものの個数を求めよ．

（複素関数論の問題はここまで）

【確率統計】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．解答に際して，導出過程も示すこと．

以下の問題において，$P(A)$ は事象 A の確率を表し，$E(X)$ と $V(X)$ は確率変数 X の期待値と分散を表す．また，e はネイピア数（自然対数の底）を表す．

問題１

ある日の，店 i $(i=1,\ldots,n)$ の来客数 Y_i は，独立にポアソン分布 $Po(\lambda_i)$ にしたがう確率変数とする．ただし，$\lambda_i>0$ は未知パラメータである．なお，パラメータ $\lambda>0$ のポアソン分布 $Po(\lambda)$ の確率関数は $f(y;\lambda)=\lambda^y e^{-\lambda}/y!$, $y=0,1,\ldots$ である．以下の設問に答えなさい．

(1) $Y_1,\ldots,Y_n$ を用いて，$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ の最尤推定量 $\hat{\lambda}_1,\ldots,\hat{\lambda}_n$ を求めよ．

(2) ポアソン分布 $Po(\lambda)$ にしたがう確率変数 Y の期待値 $E(Y)$ と分散 $V(Y)$ を求めよ．

広い店ほど来客数が多い傾向があり，店 i の広さを定数 $x_i>0$ で表すと $\lambda_i=\theta x_i$ $(i=1,\ldots,n)$ となることがわかった．ただし，$\theta>0$ は未知パラメータである．

(3) 最尤法で θ を推定したい．$Y_1,\ldots,Y_n$ を用いて，θ の最尤推定量 $\hat{\theta}$ を求めよ．

(4) 設問 (3) の $\hat{\theta}$ の期待値 $E(\hat{\theta})$ と分散 $V(\hat{\theta})$ を求めよ．

(5) 重み付き最小２乗法で θ を推定したい．$\sum_{i=1}^{n} w_i(Y_i-\theta x_i)^2$ を最小にする θ の値を $\hat{\theta}_w$ とする．ただし，$w_1,\ldots,w_n$ は正の定数である．$\hat{\theta}_w$ を求めよ．

(6) 設問 (5) の $\hat{\theta}_w$ の期待値 $E(\hat{\theta}_w)$ と分散 $V(\hat{\theta}_w)$ を求めよ．

(7) 設問 (5) の $\hat{\theta}_w$ に対して，$E((\hat{\theta}_w-\theta)^2)$ を最小にする $w_1,\ldots,w_n$ の値を求めよ．また，そのときの $\hat{\theta}_w$ を求めよ．

（確率統計の問題は次ページに続く）

【確率統計】　（続き）

問題2

X, Y を実数値確率変数とし，その累積分布関数をそれぞれ $F_X(x) = P(X \leq x)$, $F_Y(y) = P(Y \leq y)$，確率密度関数を $f_X(x)$, $f_Y(y)$ とする．ただし実数 $a < b$ に対して $F_X(a) < F_X(b)$ および $F_Y(a) < F_Y(b)$ とする．また，X と Y の同時累積分布関数を $F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$，同時確率密度関数を $f(x,y)$ とする．以下の設問に答えなさい．

(1) X をそれ自身の累積分布関数に代入して得られる $U = F_X(X)$ を考える．U は $[0,1]$ の範囲で定められる一様分布にしたがう確率変数であることを示せ．

(2) U および V を $[0,1]$ の範囲の一様分布にしたがう確率変数とする．確率変数 U,V の同時累積分布関数を $C(u,v)$ $(0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 1)$ とする．対応する同時密度関数を

$$c(u,v) \equiv \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}$$

とする．確率変数 X と Y に対して，ある C が存在して

$$F(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y))$$

と表せることが知られている．このとき C を (X,Y) のコピュラと呼び，対応する同時密度関数 c をコピュラ密度関数と呼ぶ．上式を用いて X と Y の同時確率密度関数 $f(x,y)$ を，(X,Y) のコピュラ C に対応するコピュラ密度関数 c，および $F_X(x)$，$F_Y(y)$，$f_X(x)$，$f_Y(y)$ を用いて表せ．

(3) X と Y の同時累積分布関数が

$$F(x,y) = \frac{1}{1 + e^{-x} + e^{-y}}$$

で与えられるとする．(X,Y) のコピュラ C に対応するコピュラ密度関数 $c(u,v)$ を求めよ．

(確率統計の問題はここまで)

【制御工学】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

問題1　図1のブロック線図と図2のフィードバック制御系に関する以下の設問に答えよ．ただし， a, b, K は定数パラメータとする．

(1) 図1のブロック線図において r から y への伝達関数を求めよ．

(2) 設問 (1) で求めた伝達関数のステップ応答を求めよ．

(3) 図2のフィードバック制御系が安定となる a, b, K の条件を求めよ．

(4) 図2のフィードバック制御系が安定なとき，ランプ入力 $r(t) = t$ に対する出力 $y(t)$ の定常偏差 $\lim_{t\to\infty}(r(t) - y(t))$ を， a, b, K を用いて表わせ．

(5) 図2のフィードバック制御系において $a = 1, b = 3, -\infty < K < +\infty$ とする．フィードバック制御系の極のうち実部が正のものの個数を答えよ．ただし，重複する極の個数は重複度に等しいとして数える．

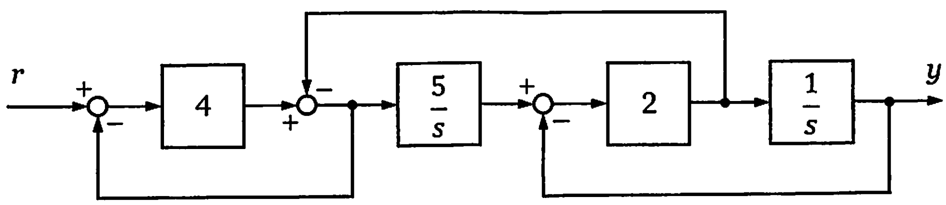

図1

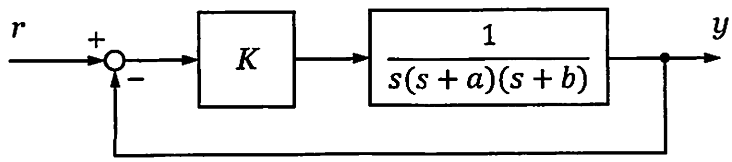

図2

（制御工学の問題は次ページに続く）

問題 2　伝達関数

$$G(s) = \frac{s+a}{s(s+1)}$$

について考える．ただし，a は 1 未満の正の定数パラメータである．以下の設問に答えよ．

(1) $G(s)$ のゲイン線図の折れ線近似を描け．

(2) 図 3 のフィードバック制御系の位相余裕が $2\pi/3$ rad 以上となる a の条件を求めよ．

(3) $G(s)$ のゲイン線図がその折れ線近似と交差する周波数を求めよ．

以下，$H(s)$ は $G(s)$ と同じゲインを持つ伝達関数であるとする．

(4) このような $H(s)$ のうち，$G(s)$ 以外の伝達関数をひとつ挙げよ．

(5) $H(s)$ に正弦波 $\sin t$ を入力したとする．十分時間が経ったとき，出力の正弦波の振幅が 5/7 であったとする．このような a を求めよ．

(6) 設問 (5) において，$H(s)$ の出力が入力と同位相，つまり，位相が $2n\pi$（n は整数）であったとする．このような $H(s)$ のひとつを求めよ．

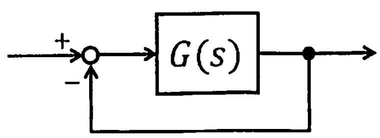

図 3

(制御工学の問題はここまで)

【信号処理】

注意: 問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること.

以下の設問において i は虚数単位, e はネイピア数 (自然対数の底), π は円周率を表す.

問題 1　以下の設問に答えよ.

(1) 周期 2π の関数 $f(x)$ を,

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & (-\pi \leq x < 0) \\ 0 & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$$

によって定義する. $f(x)$ のフーリエ級数展開を求めよ.

(2) 設問 (1) の結果を用いて, 以下の等式をみたす β_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を求めよ.

$$\pi = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{(2n+1)(2n-1)}$$

問題 2　t を時刻をあらわす変数とする. 以下の設問に答えよ.

(1) a を実数とする. 連続時間複素数値信号 $s(t) = e^{-t^2/2+iat}$ のフーリエ変換

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

を求めよ.

(2) 線形フィルタ H に角周波数 ω の複素正弦波信号を入力したとき, フィルタの出力は振幅が入力と同一で, 位相が $h\omega + k$ だけ遅れるとする. ただし, h, k は実定数である. このフィルタに設問 (1) の信号 $s(t)$ を入力した場合のフィルタの出力を $y(t)$ とするとき, $y(t)$ のフーリエ変換 $Y(\omega)$ を求めよ.

(3) 設問 (2) の $y(t)$ を求めよ.

(4) 設問 (3) で求めた $y(t)$ に対して, $|y(t)|^2$ を $p(t) = |s(t)|^2$ を使ってあらわせ.

(信号処理の問題は次ページに続く)

【信号処理】（続き）

問題 3　n を自然数とする．複素数列 $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ に対して $n \times n$ 行列 C を

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{n-1} & \cdots & c_3 & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \cdots & c_4 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2} & c_{n-3} & c_{n-4} & \cdots & c_0 & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & c_1 & c_0 \end{pmatrix}$$

によって定義する．また，$\omega = e^{i2\pi/n}$ を 1 の原始 n 乗根とすると，$c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ の離散フーリエ変換 $\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{n-1}$ は

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\ell=0}^{n-1} c_\ell \omega^{-\ell k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

によって与えられる．以下の設問に答えよ．

(1) $k = 0, 1, \ldots, n-1$ に対して

$$\boldsymbol{v}_k = \begin{pmatrix} \omega^0 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-2)k} \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix}$$

とおく．$\boldsymbol{v}_k$ は C の固有ベクトルであることを示し，対応する固有値 λ_k を $n, \tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{n-1}$ を使ってあらわせ．

(2) $n \times n$ 行列 $F = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{v}_0\ \boldsymbol{v}_1\ \ldots\ \boldsymbol{v}_{n-1})$ の逆行列 F^{-1} を求めよ．

(3) 以下の等式が成り立つことを示せ．

$$\begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{c}_1 \\ \vdots \\ \tilde{c}_{n-1} \end{pmatrix} = F^{-1} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

(4) 複素数列 $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$ の離散フーリエ変換を $\tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_{n-1}$ とおく．

$$\boldsymbol{a} = F^{-1} C \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$

によって定義される $\boldsymbol{a}$ を，$n, \tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{n-1}, \tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_{n-1}$ を使ってあらわせ．

(信号処理の問題はここまで)

裏表紙

【補足】問題文で使われた一部の記法について，試験当日，補足を行いました．