

2022年度10月期入学 / 2023年度4月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻

入学者選抜 試験問題

**【数学】**

試験日時：2022年8月5日（金） 午前10時00分より正午まで

問題冊子頁数（表紙、中表紙、裏表紙を除いて）： 4頁

**注意：**

- (1) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
- (2) 問題番号【I】の問1、問2、問題番号【II】の問1、問2のそれぞれについて別の解答用紙を使用して解答すること。その際、各解答用紙に試験科目名、問題番号【I】の問1、問2、問題番号【II】の問1、問2を忘れずに記入すること。
- (3) 解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること）
- (4) 解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

## 【数学】

### 【I】

注意：問1，問2はそれぞれ別の解答用紙に解答すること。

問1 ベクトル  $x$  に関する  $m$  元連立一次方程式  $Ax = b$  を反復法によって解くことを考える。そのために、 $m$  次正方行列  $A$  を  $P - Q$  に分解し、方程式を  $Px = Qx + b$  のように書き換え、適当な初期値  $x_0$  を与えて、 $Px_{n+1} = Qx_n + b$ 、つまり、 $x_{n+1} = P^{-1}(Qx_n + b)$  を繰り返し計算する。特に、行列  $A$  の対角要素からなる対角行列を  $P$  とする反復法をヤコビ法と呼ぶ。以下の設問に答えよ。

ただし、 $m$  次正方行列  $Z$  の逆行列を  $Z^{-1}$ 、転置を  $Z^T$ 、スペクトル半径を  $\rho(Z)$  で表す。 $\rho(Z)$  は  $Z$  の固有値  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) の絶対値の最大値 ( $\max_i |\lambda_i|$ ) に等しい。

(i)  $P^{-1}$  が存在するとき、 $Px = Qx + b$  と  $Px_{n+1} = Qx_n + b$  から、

$$x - x_{n+1} = P^{-1}Q(x - x_n)$$

となる。 $P^{-1}Q$  の固有値がすべて異なるものとして、 $n \rightarrow \infty$  のとき、任意の  $x_0$  に対して  $x_n$  が方程式の解に収束するために  $\rho(P^{-1}Q)$  が満たすべき必要十分条件をその理由とともに答えよ。

以下の設問では、次の方程式をヤコビ法を用いて解く場合について考える。

$$Ax = b, \quad A = \begin{bmatrix} 12 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

(ii)  $P$ ,  $Q$ ,  $P^{-1}$  を求めよ。

(iii)  $P^{-1}Q$  の固有値をすべて求めよ。さらに、 $P^{-1}Q$  のスペクトル半径を求めよ。

(iv)  $x_0 = [0, 0, 0]^T$  として、 $x_1$  を求めよ。

(v)  $A^{-1}$  を求めてから、方程式 (1) の解を求めよ。

(数学の問題は次ページに続く)

## 【数学】（続き）

問2 行列  $A$  は  $n \times n$  の実対称行列で、その要素を  $a_{ij} (i, j = 1, \dots, n)$  と書く。さらに、すべての要素が非負であり、

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

を満たすと仮定する。以下の設問に答えよ。ただし、 $u$  はすべての要素が1である  $n$  次元ベクトルとする。

(i)  $Au = u$  を示せ。

(ii) 任意の零ベクトルでない  $n$  次元実ベクトル  $x$  に対して、 $x$  の要素の中で絶対値が最大のものを  $x_m$  としたとき、任意の  $i \in \{1, \dots, n\}$  において

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq |x_m|$$

が成り立つことを示せ。

(iii)  $A$  の任意の固有値  $\lambda$  に対して、 $|\lambda| \leq 1$  が成り立つことを示せ。

(iv)  $n = 2$  とし、 $A$  は次の形

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 - \alpha \end{bmatrix}, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

を取るとする。設問 (i) から、 $A$  は固有値  $\lambda_1 = 1$  と対応する固有ベクトル  $v = u/\sqrt{2}$  を持つ。もう一方の固有値  $\lambda_2$  と対応する固有ベクトル  $w$  を求めよ。ただし  $w$  は正規化せよ。

(v) 設問 (iv) の  $A$  に対し、その自然数冪  $A^k$  を考える。極限

$$B = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k$$

が存在する  $\alpha$  の範囲を答えよ。また、極限が存在する場合には、その極限  $B$  を求めよ。

(数学の問題は次ページに続く)

## 【数学】(続き)

### 【II】

注意：問1，問2はそれぞれ別の解答用紙に解答すること。

**問1** 以下の設問に答えよ。以降では、 $e$ はネイピア数（自然対数の底）， $\pi$ は円周率を表す。

(i)  $\lim_{x \rightarrow +0} x^{-1/2}(1 - e^{-x})$ を求めよ。

(ii) 以下の積分を求めよ。

$$\int_0^{\infty} x^{-3/2} (1 - e^{-x}) dx$$

ただし，以下が成り立つことを用いてよい。

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(iii)  $xy$ 平面上の閉領域  $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$  に対して以下の積分を求めよ。

$$\iint_D e^{x+y} dx dy$$

(iv) 実関数  $f(x)$  および  $g(x) > 0$  が，それぞれ全ての実数  $x$  に対して定義されていて単調増加であるとする。これらが  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  を満たすとき，

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

が成り立つ，すなわち  $\frac{f(x)}{g(x)} \leq c$  が全ての実数  $x$  で成り立つような定数  $c < \infty$  が存在することを示せ。

(数学の問題は次ページに続く)

## 【数学】(続き)

問2 直交座標系  $O-xyz$  で表される3次元空間内の楕円面  $E : f(x, y, z) = 0$  を考える。ただし、

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} - 1$$

とし、 $l, m, n$  は正の定数とする。以下の設問に答えよ。

- (i) 関数  $g(x, y, z) = xyzf(x, y, z)$  を考える。閉領域  $D = \{(x, y, z) : f(x, y, z) \leq 0\}$  において、関数  $g$  の最大値と最小値を求めよ。
- (ii) 楕円面  $E$  の法線であって  $E$  上の点  $(x_0, y_0, z_0)$  を通るものの方程式を求めよ。
- (iii) 関数  $h(x, y, z) = ax + by + cz$  を最大にする楕円面  $E$  上の点  $(x, y, z)$  を求めよ。ただし、 $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  とする。
- (iv) 3点  $(p, 0, 0), (0, q, 0), (0, 0, r)$  を含む平面が楕円面  $E$  と接している。この条件で  $p, q, r$  を動かしたときに  $p^2 + q^2 + r^2$  の最小値を求めよ。

(数学の問題はここまで)

2022年度10月期入学 / 2023年度4月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻 入学者選抜 試験問題

【専門科目】

試験日時：2022年8月5日（金） 午後1時00分より同4時00分

問題冊子頁数（表紙、中表紙、裏表紙を除いて）： 10頁

選択科目：下記の科目のうち、2科目を選択し解答すること。

【論理回路】（3）

【工業数学】（3）

【基本ソフトウェア】（2）

【確率統計】（3）

【制御工学】（3）

なお（ ）内数字は解答用紙の最大使用枚数を示す。

注意：

- (1) 上記科目から2科目を超えて選択してはいけない。3科目以上選択した場合は、本専門科目の答案を無効にすることがある。別紙の選択表への記入を忘れないこと。
- (2) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
- (3) 解答は上記最大使用枚数に注意すること。対応する解答用紙に解答中の科目名を明記すること。なお各問題に注意書きがあればそれに従うこと。
- (4) 解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること。）
- (5) 解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

## 【論理回路】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること

### 問題 1

以下の論理関数  $f$  の最簡積和形と最簡和積形をそれぞれ求めよ。

$$f(X_1, X_2, X_3, X_4) = \bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3\bar{X}_4 + \bar{X}_1\bar{X}_2X_3 + \bar{X}_1X_2\bar{X}_3X_4 + \bar{X}_1X_2X_3 + X_1\bar{X}_2\bar{X}_3$$

### 問題 2

2進数の除算を行う組合せ回路を考える。以下の設問に答えよ。

(1) 次の2進数の除算 ( $0101 \div 0011$ ) を計算せよ。

$$0011 \overline{) 0101}$$

- (2) 符号無し4ビット2進数の除算を実現する回路を全加算器と AND, OR, NOT 素子によって構成し、図示せよ。ただし、 $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ を $\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$ で除算を行った際の商 (quotient) を $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ とし、余り (remainder) を $\{r_0, r_1, r_2, r_3\}$ とする。また、図1の拡張された1ビット全加算器を用いて図示して良い。この全加算器では、入力  $z$  が1の場合には、1ビット入力  $x$  と  $y$  と下の桁からの桁上がり  $C_i$  の和を出力  $S$ 、桁上りを出力  $C_o$  とする。入力  $z$  が0の場合には、 $S$  として  $x$  を出力し、 $C_o$  は0となる。
- (3) 符号無し4ビット除算器の回路構成から、除算器の特徴を加算器、乗算器と比べ、論じよ。

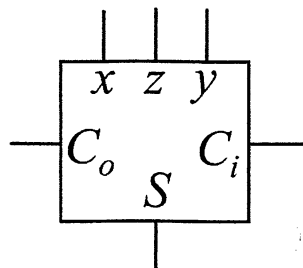


図1 設問(2)の拡張された1ビット全加算器回路

(論理回路の問題は次ページに続く)

## 【論理回路】(続き)

### 問題3

表1の状態遷移表によって定まる不完全定義順序回路について以下の設問に答えよ。表中のX/Yの表記は次状態Xと出力Yを示しており、-はドントケアである。例えば、現状態Aにおいて入力1が与えられると、次状態Bに遷移して出力はドントケアである。

- (1) この不完全定義順序回路の極大両立集合(maximal compatible set)を全て示せ。ただし、2つの状態は、任意の印加可能な(applicable)入力系列に対する両者の出力系列が(一方あるいは両方の出力が定義されていない場合を除き)いつでも同じになる時、両立する(compatible)という。また、状態の集合は、それに含まれる任意の2つの状態の対が両立する時に両立集合と呼ばれ、両立集合はそれを真に包含する両立集合が存在しない時に極大両立集合と呼ばれる。
- (2) 設問(1)で求めた極大両立集合のそれぞれに状態名を割り当てることで状態数を削減した順序回路の状態遷移表を示せ。
- (3) 設問(2)で求めた状態遷移表を実現する順序回路を、D フリップフロップとAND, OR, NOT 素子によって構成し、図示せよ。

表1：状態遷移表

現状態	入力	
	0	1
A	E/-	B/-
B	G/-	D/-
C	A/0	-/-
D	A/1	-/-
E	F/-	C/-
F	A/1	A/0
G	A/0	A/1

(論理回路の問題はここまで)



## 【工業数学】

注意: 問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること。

以下の設問において  $i$  は虚数単位,  $e$  はネイピア数 (自然対数の底),  $\pi$  は円周率,  $\mathbb{C}$  は複素数の集合,  $\mathbb{R}$  は実数の集合をあらわす. また, 複素数  $z$  に対して,  $\bar{z}$  は  $z$  の複素共役を,  $|z|$  は  $z$  の絶対値を,  $\operatorname{Re} z$ ,  $\operatorname{Im} z$  は  $z$  の実部, 虚部をそれぞれあらわす.

問題 1 以下の設問に答えよ.

- (1) 複素変数  $z$  のべき級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n$$

の収束半径を求めよ.

- (2) 複素数  $z$  の実部, 虚部をそれぞれ  $x, y$  とおく. ある領域  $D \subset \mathbb{C}$  で定義された  $z = x + iy$  の複素関数  $w = f(z)$  が  $w = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ ,  $\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ ,  $\psi(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$  の形で表現され, さらに  $D$  において関係式

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

が成り立つことを仮定する. ただし,  $u, v$  は  $x, y$  の関数である. このとき, 複素関数  $f(z)$  は  $D$  において正則であることを示し, 導関数  $df/dz$  を  $u, v$  を用いてあらわせ.

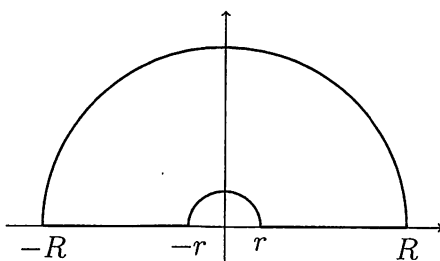
- (3) 下図に示した閉路に沿った関数

$$f(z) = \frac{1 - e^{2iz}}{z^2}$$

の複素積分を考えることにより, 実定積分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

の値を求めよ.



(工業数学の問題は次ページに続く)

## 【工業数学】（続き）

問題2 複素数  $z, w \in \mathbb{C}$  に対して,  $F(z, w) = \operatorname{Re}(\bar{z}w)$  により関数  $F(z, w)$  を定義する. 以下の設問に答えよ.

- (1) 任意の  $z \in \mathbb{C}$  に対して,  $F(z, iz) = 0$  であることを示せ.
- (2)  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  に対して  $u = i(z_1 - z_2)$  とおく.  $F(z_1, u) = F(z_2, u)$  が成り立つことを示せ.
- (3)  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  がともに0でなく, さらに  $z_1 = tz_2$  が成り立つような実数  $t$  が存在しないとする. このとき,  $F(z_1, z_3) = F(z_2, z_3) = F(z_1, z_2)$  が成り立つような複素数  $z_3$  を,  $z_1$  および  $z_2$  を使ってあらわせ.

問題3 複素変数  $z$  のべき級数により定義される関数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

について, 以下の設問に答えよ.

- (1)  $f(z)$  を定義するべき級数の収束半径を  $R$  とする. 任意の  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$  および  $0 < r < R$  をみたす任意の  $r$  に対し, 不等式

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta$$

が成り立つことを示せ.

- (2)  $f(z)$  を定義するべき級数の収束半径が  $\infty$  であるとする. さらに, ある非負の定数  $a, b, m$  が存在し,  $|z| > b$  をみたす任意の  $z$  に対して不等式

$$|f(z)| \leq a|z|^m$$

が成り立つとする. このとき,  $f(z)$  は次数が  $m$  以下の多項式であることを示せ.

(工業数学の問題はここまで)

## 【基本ソフトウェア】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること。

### 問題 1

以下に示す C 言語の関数  $f(a, n)$  は、 $n$  要素 ( $n > 0$ )  $\text{int}$  型の配列  $a$  の昇順ソートをするアルゴリズム (以下 A と呼ぶ) により行うものである。この関数  $f()$  について、設問(1)~(4)に答えよ。

```
void f(int *a, unsigned int size) {
    int i, j, h, t;
    int d = 2;
    h = size / d;
    for(; h>0; h (a) _____) {
        for(i=h; i<size; i++){
            j = i;
            t = (b) _____;
            while((j>=h) && ((c) _____>t)) {
                a[j] = a[j-h];
                j = (d) _____;
            }
            (e) _____ = t;
        }
    }
}
```

- (1) 下線部(a)~(e)を C 言語の式で埋めて、関数  $f()$  を完成させよ。なおその際、ソートに要する時間ができるだけ短くなるように配慮せよ。
- (2) A が安定か否かを示し、その根拠を簡潔に述べよ。
- (3) A の最悪計算時間量のオーダーを、関数  $f()$  の引数  $n$  について求め、その根拠を簡潔に述べよ。
- (4) 関数  $f$  内で定義される変数  $d$  (二重下線部) の値を変更し、それに伴い  $h$  (二重下線部) の式を変更することにより、A のアルゴリズムのソート性能を向上させる手法を論ぜよ。

(基本ソフトウェアの問題は次ページに続く)

## 【基本ソフトウェア】（続き）

### 問題 2

単一コアで構成される単一 CPU による表 1 のプロセスのスケジューリングについて、以下の設問に答えよ。ただし、プロセスは A, B, C, D の順に到着し、時刻  $t = 0$  の時点で実行可能キューに存在するものとする。タイムスライスを 1 とし、プロセスの切り替えに要するオーバーヘッドは無視できるものとする。

- (1) 次の (a), (b) のスケジューリング方式によって得られる処理系列を示し、すべてのプロセスのターンアラウンド時間の合計を求めよ。

(a) 到着順スケジューリング (first-come first-served, FCFS)

(b) ラウンドロビン (round-robin)

- (2) 実行可能キューに存在する各プロセスに対し、タイムスライスごとに二つのパラメータ  $p_t, q_t$  を割り当て、 $p_t$  の値が最小のプロセスを実行するスケジューリングを考える。ただし、 $p_t, q_t$  は  $t = 0$  では初期値が与えられ、 $t \geq 1$  では以下の式に基づいて更新されるものとする。 $k$  は 0 以上の定数とする。

$$p_t = p_{t-1} + q_t$$

$$q_t = \begin{cases} k \times (q_{t-1} + 60) & (\text{プロセスが実行中の場合}) \\ k \times q_{t-1} & (\text{プロセスが実行中でない場合}) \end{cases}$$

なお、 $p_t, q_t$  の値はタイムスライスごとに小数点以下を切り捨て、整数とする。設問 (i)~(iii) に答えよ。

- (i)  $k = 0.5$  とすると、表 2 のように  $p_t, q_t$  が推移した。(ア)~(キ)に入れるべき数値を答えよ。
- (ii)  $k = 0.5$  かつ表 2 で示す  $p_t, q_t$  の初期値の場合の処理系列を示し、すべてのプロセスのターンアラウンド時間の合計を求めよ。
- (iii)  $k$  を小さくした場合と  $k$  を大きくした場合について、それぞれどのようなスケジューリングに近づくか、理由と共に答えよ。

表 1: プロセス一覧

プロセス	処理時間
A	4
B	2
C	5
D	2

表 2: パラメータの推移 ( $p_t/q_t$ )

時刻 $t$	0	1	2	3	4	5
A	0/0	30/30	(ア)	52/7	(オ)	101/16
B	20/0	20/0	(イ)	(ウ)	72/7	75/3
C	40/0	40/0	40/0	(エ)	85/15	(カ)
D	60/0	60/0	60/0	60/0	60/0	(キ)

(基本ソフトウェアの問題はここまで)

## 【確率統計】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること。解答に際して、導出過程も示すこと。

以下の問題において、 $\log x$ は $x$ の自然対数を表し、 $P(A)$ は事象 $A$ の確率を表す。また、 $N(\mu, \sigma^2)$ は期待値 $\mu$ 、分散 $\sigma^2$ の正規分布を表し、 $X \sim N(0, 1)$ の累積分布関数 $P(X \leq x)$ を $\Phi(x)$ で表す。正規分布に関する次の性質を解答に用いてよい。確率変数 $Z_1, \dots, Z_n$ が独立に正規分布 $Z_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ,  $i = 1, \dots, n$ にしたがうとき、 $Z_1 + \dots + Z_n$ は正規分布にしたがう。定数 $a, b$ に対して、 $aZ_1 + b$ は正規分布にしたがう。

### 問題1

確率変数 $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n$ は独立に正規分布にしたがひ、 $X_i \sim N(\mu, 1)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $Y_j \sim N(\eta, 1)$ ,  $j = 1, \dots, n$ とする。実数 $\mu, \eta$ は未知パラメータである。 $X_1, \dots, X_m$ の標本平均を $\bar{X}$ ,  $Y_1, \dots, Y_n$ の標本平均を $\bar{Y}$ とおく。このとき、以下の設問に答えよ。ただし、 $\Phi(x)$ , および $p = \Phi(x)$ の逆関数 $x = \Phi^{-1}(p)$ を解答に用いてよい。

- (1)  $\bar{X}$ のしたがう確率分布を求めよ。
- (2) 帰無仮説 $H_0: \mu = 0$ , 対立仮説 $H_1: \mu = \mu_1, \mu_1 > 0$ の仮説検定を有意水準 $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )で行いたい。そのために定数 $c$ を定めておき、 $\bar{X} > c$ のとき $H_0$ を棄却する。定数 $c$ を求め、 $m, \alpha$ を用いて表せ。
- (3) 設問(2)における検出力 $\beta$ を求め、 $\mu_1, m, \alpha$ を用いて表せ。ここで検出力とは、対立仮説のもとで帰無仮説を棄却する確率である。
- (4) 帰無仮説 $H_0: \mu = \eta = 0$ , 対立仮説 $H_1: \mu = \mu_1, \eta = \eta_1, \mu_1 > 0, \eta_1 > 0$ の仮説検定を有意水準 $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )で行いたい。定数 $d$ を定めておき、検定統計量 $T = (\sqrt{m} \cos \theta) \bar{X} + (\sqrt{n} \sin \theta) \bar{Y}$ が、 $T > d$ のとき $H_0$ を棄却する。ただし、 $\theta \in [0, \pi/2]$ は事前に定めておく定数である。定数 $d$ を求めよ。
- (5) 設問(4)における検出力 $\beta$ を求め、 $\mu_1, \eta_1, m, n, \alpha, \theta$ を用いて表せ。また、 $\beta$ を最大にするように $\theta$ を定めたい。 $\beta$ の最大値、および最大値を実現するときの $\cos \theta$ を求めよ。

(確率統計の問題は次ページに続く)

## 【確率統計】 (続き)

### 問題2

以下の設問に答えよ.

- (1) 任意の確率変数  $X, Y$  に対する累積分布関数  $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$  は,  $x_1 < x_2, y_1 < y_2$  を満たす任意の  $x_1, x_2, y_1, y_2$  に対して

$$F_{X,Y}(x_2, y_2) + F_{X,Y}(x_1, y_1) - F_{X,Y}(x_1, y_2) - F_{X,Y}(x_2, y_1) \geq 0$$

を満たす. その理由を述べよ.

- (2)  $X_1$  と  $X_2$  を  $(0, 1)$  上の一様分布にしたがう独立な確率変数とする.

$$Y_1 = \sqrt{-2 \log X_1} \cos(2\pi X_2), \quad Y_2 = \sqrt{-2 \log X_1} \sin(2\pi X_2),$$

によって定義される確率変数  $Y_1, Y_2$  の確率密度関数  $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$  を求めよ.

- (3)  $Y$  は,  $0, 1$  を値にとる確率変数で,  $P(Y = 0) = P(Y = 1) = 1/2$  とする. また  $X$  を,  $Y = 1$  のとき  $N(0, 1)$ ,  $Y = 0$  のとき  $N(\mu, 1)$  にしたがう確率変数とする.  $f_{X|Y}(x|y)$  を  $Y = y$  で条件付けられた  $X$  の条件付き確率密度関数,  $f_X(x)$  を  $X$  の確率密度関数とする.

(3-1)  $f_{X|Y}(x|y)$  および  $f_X(x)$  を求めよ.

- (3-2)  $Y$  は観測できず,  $f_X$  からの独立な確率変数  $X_1, \dots, X_n$  のみが観測されるとする. このとき,  $\mu$  の最尤推定量  $\hat{\mu}$  の満たすべき方程式 ( $\hat{\mu}$  の陰関数表示) を次の形

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^n X_i p_i(\hat{\mu}, \mathbf{X})$$

で表示したときの  $p_i(\hat{\mu}, \mathbf{X})$  を求めよ. ただし  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  であり, また  $\sum_{i=1}^n p_i(\hat{\mu}, \mathbf{X}) = 1, p_i(\hat{\mu}, \mathbf{X}) \geq 0$  を満たすものとする.

- (3-3)  $n = 1$  のとき, 設問 (3-2) の  $\hat{\mu}$  を求めよ. また, この  $\hat{\mu}$  が  $\mu$  の不偏推定量であるか否かを理由を付して答えよ. ただし  $\mu \neq 0$  とする.

(確率統計の問題はここまで)

## 【制御工学】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること。

問題 1 以下の設問に答えよ。

(1) 入力  $u(t)$  と出力  $y(t)$  の関係が微分方程式

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2 \sin y(t) = u(t)$$

で記述されるシステムにおいて、入力と出力がそれぞれ一定値  $u(t) = \bar{u}$ ,  $y(t) = \bar{y}$  となる平衡状態を考える。  $\bar{y} = \pi/2$  のとき、平衡状態からの入力と出力の微小変化をそれぞれ  $\delta u(t)$ ,  $\delta y(t)$  としてこの微分方程式を線形化し、  $\delta u$  から  $\delta y$  への伝達関数を求めよ。

(2) 伝達関数が

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+5)}$$

であるシステムのステップ応答を求めよ。

(3) 図 1 のフィードバック制御系において、

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + as + 2}, \quad K(s) = b + \frac{c}{s}$$

とする。ここで  $a, b, c$  は定数パラメータであり、  $c \neq 0$  とする。  $2 \leq a \leq 5$  を満たすすべての  $a$  に対してフィードバック制御系が安定となる  $b, c$  の条件を求めよ。

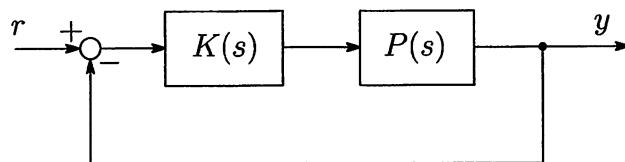


図 1

(4) 設問 (3) のフィードバック制御系において  $a = 1$  とする。単位ステップ入力  $r(t) = 1$  に対する出力  $y(t)$  が  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1$  と  $\left| \frac{d^2y}{dt^2}(0) \right| \leq 1$  を満たす  $b, c$  の条件を求めよ。

(制御工学の問題は次ページに続く)

## 【制御工学】(続き)

### 問題2 位相進み補償

$$C(s) = k \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$$

は特定の周波数帯域で位相を進める働きをする補償器である。ただし、 $k, T$  は正の定数、 $\alpha$  は1未満の正の定数である。このとき、次の命題が成り立つ。

**命題1** 周波数伝達関数  $C(j\omega)$  の位相の最大値は  $\arctan \frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}}$  であり、この最大値は角周波数  $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$  に対して得られる。

以下の設問に答えよ。

- (1) 角周波数  $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$  における周波数伝達関数  $C(j\omega)$  のゲインを求めよ。
- (2)  $k = 1, T = 2, \alpha = 0.1$  のときの  $C(s)$  のボード線図の概形を描け。この際、軸上に主要な値を書き入れよ。ただし、ゲイン線図は折線近似でよい。また、近似値  $\arctan(0.9\sqrt{10}/2) \approx 55^\circ$  を用いよ。
- (3) 図2のような伝達関数  $P(s)$  と  $K(s)$  のフィードバック制御系について考える。 $K(s) = 1$  の場合の位相交差周波数が  $\omega_{pc} = 3$ 、ゲイン余裕が  $GM = 3\text{dB}$  であるとする。ここで、 $\omega_m = \omega_{pc}$  を満たす位相進み補償  $C(s)$  によって、 $K(s) = C(s)$  の場合の開ループ系の周波数伝達関数  $P(j\omega)K(j\omega)$  が次の2つの条件を満たすようにしたい。
  - (a) 角周波数  $\omega_{pc}$  における位相が  $-135^\circ$  である。
  - (b) 角周波数  $\omega_{pc}$  におけるゲインが  $0\text{dB}$  である。

このような定数  $k, T, \alpha$  を求めよ。なお、近似値  $2 \approx 6\text{dB}$  を用いよ。

- (4) 命題1を証明せよ。ただし、次の公式を用いてよい。

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

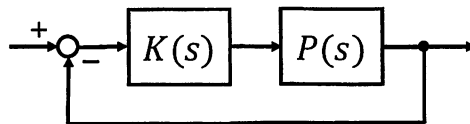


図2

(制御工学の問題はここまで)