2022年度10月期・2023年度4月期

京都大学大学院情報学研究科修士課程
先端数理科学専攻

入学者選抜試験問題

【基礎科目】

2022年7月16日 10:00 – 11:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は1時間30分である。途中退室は認めない。

(4) 全部で5題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から3題選択して解答すること。4題以上選択した場合は、問題番号の若い順に3題のみ採点を行う。

(5) 各受験者に対し、解答用紙3枚と下書用紙 (計算用紙) が配布される。試験開始後、3枚の解答用紙の所定欄に受験番号と氏名を記入すること。

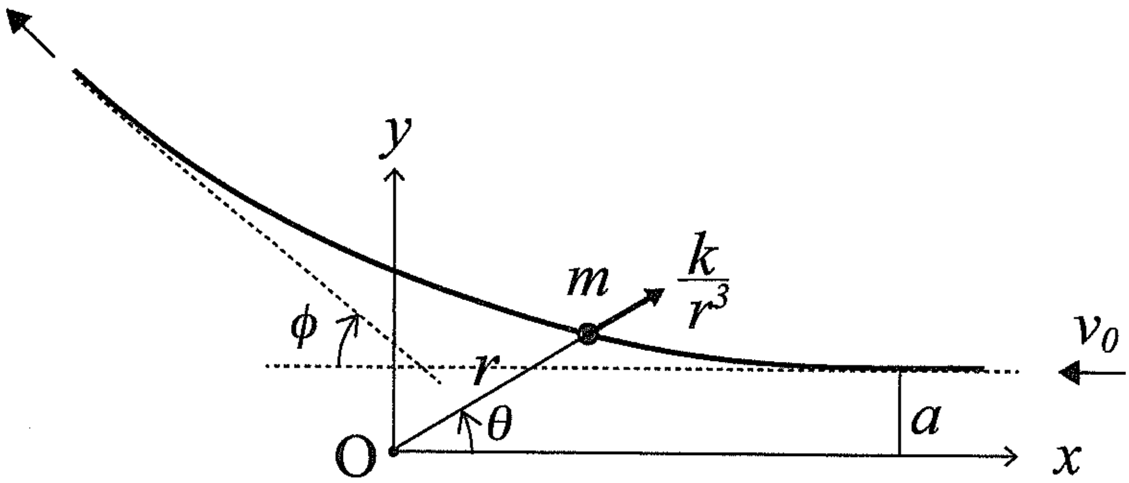
(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答用紙1枚につき1題を解答すること。
解答用紙の裏面を用いる場合は、解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 解答用紙3枚全てを提出すること。2題以下しか選択していない場合でも、選択予定の問題番号を記入し、必ず3枚の解答用紙を提出すること。

(8) 問題用紙・予備の解答用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1

下図のように，O-xy 平面内で x 軸正方向の無限遠から飛来した質量 m の質点が原点 O を中心とする中心力を受けて無限遠に飛び去る散乱現象を考える．この質点の散乱前の無限遠での軌道と速度の大きさは，それぞれ $y=a$ と v_0 で与えられる．この質点の位置を原点 O からの距離 r と x 軸から測った偏角 θ による極座標 (r,θ) で表す．この中心力の大きさは，k を正の定数，原点 O から遠ざかる方向を正として $\dfrac{k}{r^3}$ で与えられる．以下の問いに答えよ．



(1) この質点の運動方程式を極座標 (r,θ) を用いて書け．

(2) この質点の原点 O まわりの角運動量の大きさを求めよ．

(3) $u=\dfrac{1}{r}$ とおくとき，$\dfrac{d^2r}{dt^2}$ と $\dfrac{d^2u}{d\theta^2}$ の関係を求めよ．ただし t は時間を表す．

(4) この質点の散乱角 ϕ を求めよ．ただし散乱角とは，散乱前の無限遠での速度ベクトルと散乱後の無限遠での速度ベクトルのなす角である．

2

a を実数とする．3 行 3 列の実行列 X を

$$X=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 2 & 1 & 5\\ 1 & 5 & -2\end{pmatrix}$$

によって与える．次の各問に答えよ．

(1) 行列 X の階数 $\mathrm{rank}\,(X)$ が $\mathrm{rank}\,(X)=2$ を満たすための必要十分条件は $a=2$ であることを示せ．

(2) n を自然数とする．$a=2$ のとき，行列 X^n の階数 $\mathrm{rank}\,(X^n)$ を求めよ．

3 3 行 3 列の実行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

によって与える．また，B は 4 行 4 列の実行列とし，A と B は同じ固有値を持たないものとする．次の各問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値を全て求めよ．

(2) 4 行 3 列の実行列 C で

$$CA = BC$$

を満たすものを全て求めよ．

4 次の各問に答えよ．

(1) 複素数 z の実部と虚部をそれぞれ $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$ とする．$|\mathrm{Re}\, z| \leq \pi$, $0 \leq \mathrm{Im}\, z \leq 1$ のとき，$|\cos z|$ の最大値を求めよ．

(2) 次の値を求めよ．$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx$.

5 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $D = \{\, (x, y) \mid x^2 + xy + y^2 \leq \frac{1}{2},\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ に対し，重積分 $\displaystyle\iint_D 1\, dx\, dy$ を求めよ．

2022年度10月期・2023年度4月期

京都大学大学院情報学研究科修士課程
先端数理科学専攻

入学者選抜試験問題

【専門科目】

2022年7月16日 13:00 – 14:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は1時間30分である。途中退室は認めない。

(4) 全部で5題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から1題のみを選択して解答すること。2題以上選択した場合は、問題番号の最も若い1題のみを採点対象とする。

(5) 各受験者に対し、解答用紙1枚と下書用紙 (計算用紙) が配布される。開始後、解答用紙の所定欄に受験番号と氏名を記入すること。

(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答に際して裏面を用いる場合は解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1 次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　複素数体 $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間 X, Y の内積をそれぞれ $(\ ,\ )_X$, $(\ ,\ )_Y$ とする．X 全体を定義域とする有界線型作用素 $A : X \to Y$ に対して，写像 $A^* : Y \to X$ を $(Ax, y)_Y = (x, A^*y)_X \quad (x \in X,\ y \in Y)$ によって定義する．

(1) 写像 $A^* : Y \to X$ が well-defined であることを示し，さらに A^* は有界線型作用素であることを示せ．

(2) A の値域 $R(A)$ を Y の閉部分空間とする．このとき $y \in R(A)$ であるための必要十分条件は，A^* の零空間 $N(A^*)$ の任意の元 z に対して $(y, z)_Y = 0$ が成立することであることを示せ．

(3) A の値域 $R(A)$ が Y の閉部分空間であるときに，さらに A の零空間 $N(A)$ は $N(A) = \{0\}$ とする．このとき逆作用素 $A^{-1} : R(A) \to X$ は有界であることを示せ．

(4) A の値域 $R(A)$ が Y の閉部分空間とならないような有界線型作用素 $A : X \to Y$ の例を 1 つ挙げよ．

問 2　$\mathbb{R}^2$ において，曲線 Γ は滑らかな単純閉曲線とし，Γ で囲まれた単連結領域を D, D に対する Γ 上の単位外向き法線ベクトルを $\vec{n}$ とする．$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して $E(x) = \dfrac{1}{2\pi} \log |x|$ $(x \neq 0)$ とし，$\mu(x)$ を Γ 上で定義される連続関数とするとき，$u(x)$ を

$$u(x) = \int_\Gamma \frac{\partial E}{\partial n_y}(x - y)\mu(y)\, d\sigma_y, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$$

とする．ただし $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ であり，変数 y について $\dfrac{\partial}{\partial n_y}$ は境界 Γ 上での $\vec{n}$ 方向微分を表し，$d\sigma_y$ は境界 Γ の線素を表すものとする．

(1) $u(x)$ は $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ の調和関数であることを示せ．

(2) $x_0 \in \Gamma$ とし，この点での $\vec{n}$ を $\vec{n_0}$ と表す．$\displaystyle\lim_{h \to +0} \Bigl(u(x_0 + h\vec{n_0}) - u(x_0 - h\vec{n_0}) \Bigr)$ を求めよ．

2 次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1 常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^3 + xy^4}{2y^3}, \quad y(0) = 1$$

の解を求めよ．

問 2 虚数単位を i とし，$\omega = e^{\frac{2}{3}\pi i}$ に対してその共役複素数を $\overline{\omega}$ と表す．複素平面上の 3 点 $1, \omega, \overline{\omega}$ を頂点とする三角形領域を T とし，その境界を ∂T と表す．このとき複素積分

$$\text{p.v.} \int_{\partial T} \frac{z^3}{z - \omega}\, dz$$

の値を求めよ．ここに p.v. は Cauchy の意味での積分の主値を意味し，∂T 上の積分は領域 T に対して正の向きとする．

問 3 空間 1 次元の熱方程式の初期値境界値問題

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) & \quad & (0 < x < 1, 0 < t \le 1) \\ u(0,x) &= u_0(x) & & (0 \le x \le 1) \\ u(t,0) &= u(t,1) = 0 & & (0 \le t \le 1) \end{aligned}$$

を考える．初期値 $u_0(x)$ は十分滑らかな実数値関数で，$u_0(0) = u_0(1) = 0$ を満たしているとする．x の区間 $[0,1]$ を N 等分して $\Delta x = \dfrac{1}{N}$, t の区間 $[0,1]$ を M 等分して $\Delta t = \dfrac{1}{M}$ とするとき，この問題の数値解を求めるための差分スキームを 1 つ与え，さらにその収束性と安定性について説明せよ．

3

次の各問のそれぞれに答えよ．

問１　次の定積分の値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2}\, dx$$

問２　xyz 空間において，曲面 S を

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - 3z^2 = 0,\ x > 0,\ 0 < z < 1\}$$

とし，$\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ は曲面 S 上の単位法線ベクトルで $n_z < 0$ を満たすようにとられているとする．このとき，$f(x, y, z) = 3(x^2 + y^2)z - 2z^3 - x$ に対して曲面積分

$$\int_S \nabla f \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

の値を求めよ．ここに，dS は曲面 S の面積要素である．

問３　n を正の整数，I を n 次単位行列，A, B を n 次実正方行列とし，$2n$ 次正方行列

$$M = \begin{pmatrix} I + A & B \\ B & I + A \end{pmatrix}$$

は正則行列であるとする．また，$\|\cdot\|$ を $\mathbb{R}^n$ のユークリッドノルムに対する行列の作用素ノルムとする．ここで，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{2n}$ を与えて線形方程式 $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考え，その厳密解を $\boldsymbol{x}_* \in \mathbb{R}^{2n}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ を与えて $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^{2n}$ を

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = -\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{b} \quad (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

により定める．行列 A, B が $\|A\| + \|B\| < 1$ を満たすとき，任意の $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ に対して $\boldsymbol{x}_i$ は $i \to \infty$ で $\boldsymbol{x}_*$ に収束することを示せ．

(2) $\widetilde{\boldsymbol{x}}_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ を与えて $\widetilde{\boldsymbol{x}}_i \in \mathbb{R}^{2n}$ を

$$\begin{pmatrix} I + A & 0 \\ 0 & I + A \end{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{x}}_{i+1} = -\begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{x}}_i + \boldsymbol{b} \quad (i = 0, 1, 2, \cdots) \qquad (*)$$

により定める．このとき，行列 A が正定値対称行列であり，行列 B が $\|B\| < 1$ を満たすならば，漸化式 $(*)$ により $\widetilde{\boldsymbol{x}}_i$ から $\widetilde{\boldsymbol{x}}_{i+1}$ が一意に定まることを示せ．さらに，このとき任意の $\widetilde{\boldsymbol{x}}_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ に対して $\widetilde{\boldsymbol{x}}_i$ は $i \to \infty$ で $\boldsymbol{x}_*$ に収束することを示せ．

4

質量 m の N 個の分子からなり，系の全エネルギー E が

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{|\boldsymbol{p}_i|^2}{2m} + \sum_{i<j} U(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)$$

で与えられる体積 V の不完全気体の系を考える．ここで，$\boldsymbol{p}_i$ および $\boldsymbol{r}_i (i = 1, 2, \cdots, N)$ はそれぞれ i 番目の分子の運動量および位置を表し，$\sum\limits_{i<j}$ は全ての分子の対についての和を表す．分子間のポテンシャルエネルギー $U(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)$ は 2 分子間の距離 $|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|$ のみに依存する関数であるとする．分子数 N と体積 V は十分大きく，系は絶対温度 T の熱平衡状態にあると仮定する．また，プランク定数を h，ボルツマン定数を k として，$\beta = 1/(kT)$ とする．この系の分配関数 Z は

$$Z = Z_0 Z_U \quad ただし\ Z_U = \int \prod_{i=1}^{N} d\boldsymbol{r}_i \prod_{i<j} \exp\left(-\beta U(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)\right)$$

と表すことができる．ここで，$\prod\limits_{i<j}$ は全ての分子の対についての積を表す．以下の問に答えよ．

(1) Z_0 を求めよ．

関数 $f(r) (r \geq 0)$ を $f(r) = \exp\left(-\beta U(r)\right) - 1$ とし，以下の問では相互作用が十分弱く，$\beta U(r)$ および $f(r)$ の大きさは十分小さいと仮定する．

(2) Z_U を $f(r)$ の 1 次のオーダーまで計算することにより，ある定数 a および b を用いて次の形

$$Z_U = V^N + aV^b \frac{N(N-1)}{2} A,\ ただし\ A = \int_0^\infty f(r) r^2 dr$$

で近似されることを示せ．ただし，$f(r)$ は $r \to \infty$ で十分早く 0 に減衰するものと仮定する．さらに，a および b を求めよ．

(3) 問 (2) の結果を用いて，この系の圧力 P を求めよ．ただし，相互作用は十分弱く，A の 1 次のオーダーまで計算すればよい．

(4) r_0 および U_0 は正の定数とする．分子間のポテンシャルエネルギーを

$$U(r) = \begin{cases} \infty & (0 \leq r < r_0) \\ -U_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^6 & (r_0 \leq r < \infty) \end{cases}$$

とするとき，問 (3) の結果を用いて圧力 P を計算せよ．また，U_0 が大きくなると圧力 P はどのように変化するか，物理的な理由も含めて説明せよ．

5

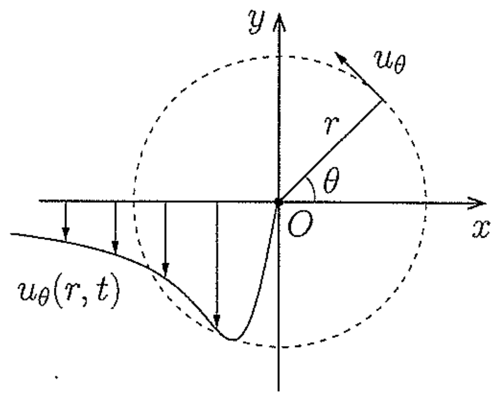
次の各問のそれぞれに答えよ．ただし t は時間を表す．

問 1

xy 平面上において x 軸に平行で，かつ y 方向に一様である流れを考え，その流速場を $(u,v)=(u(x,t),0)$ と表す．この流体の密度が $\rho(x,t)=\rho_0 e^{-at}$ で与えられるとき，$u(0,t)=u_0$ を満足する u を求めよ．ただし ρ_0，a は正定数，u_0 は定数である．

問 2

xy 平面上において原点 O を中心とする半径が無限小の円を考え，その外部の領域を占める非圧縮性粘性流体の 2 次元非定常流について考える．右図のように点 O を中心とする平面極座標 (r,θ) を導入し，流速の動径方向成分を u_r，周方向成分を u_θ と表す．はじめこの円は点 O を中心にある角速度で回転しており，このときの流速を，a を正定数として次式で与える：



$$u_r=0,\quad u_\theta=\frac{a}{2\pi r},\qquad r>0. \qquad (*)$$

いま，ある瞬間にこの円の回転が静止したとし，そのときの時刻を $t=0$ として $t>0$ におけるこの流体の非定常運動を考える（図参照）．流れは点 O のまわりに回転対称で，かつ流速は動径方向の成分をもたないと仮定すると，$u_\theta=u_\theta(r,t)$ は次の方程式

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t}=\nu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta)\right)\qquad (0<r<\infty,\quad 0<t<\infty)$$

を満足することが知られている．ただし ν は流体の動粘性係数を表す．このとき以下の設問に答えよ．

(1) (*) の流速場に対し，xy 平面の原点を中心とする半径 $R>0$ の円周に沿う循環 Γ を求めよ．

(2) u_θ がある 1 変数関数 $F(\eta)$ を用いて $u_\theta(r,t)=\dfrac{a}{2\pi r}F\left(\dfrac{r}{t^{1/2}}\right)$ と表されているとき，$F(\eta)$ が満足する微分方程式を求めよ．

(3) 円表面で境界条件 $\lim\limits_{r\to 0}u_\theta(r,t)=0$ を満足し，かつ (*) を初期値とする解 $u_\theta(r,t)$ を求めよ．

(4) ω をこの流体の $t>0$ における渦度とするとき，極限 $\lim\limits_{r\to 0}t\omega$ を求めよ．