2021年度10月期入学 / 2022年度4月期入学
京都大学 大学院情報学研究科
修士課程 知能情報学専攻 入学者選抜試験問題
(情報学基礎)

2021年7月31日 9:00～11:00

【注意】

1. 問題冊子はこの表紙を含めて11枚ある。
2. 試験開始の合図があるまで中を見てはいけない。
3. 試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷の不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
4. 問題は日本語と英語の両方で出題されている。すべて解答しなさい。
   F1-1, F1-2　　線形代数、微分積分 ……………………… 1-4ページ
   F2-1, F2-2　　アルゴリズムとデータ構造 ……………… 5-10ページ
5. 特に指定のない限り、日本語または英語で解答すること。
6. 解答用紙に記載されている注意事項についても留意すること。

The Japanese version of this document is the prevailing and authoritative version; the English translation below is provided for reference only

October 2021 Admissions / April 2022 Admissions
Entrance Examination for Master's Program
Department of Intelligence Science and Technology
Graduate School of Informatics, Kyoto University
(Fundamentals of Informatics)

July 31, 2021
9:00 - 11:00

NOTES

1. This is the Question Booklet in 11 pages including this front cover.
2. Do not open the booklet until you are instructed to start.
3. After the examination has started, check the number of pages and notify proctors (professors) immediately if you find missing pages or unclear printings.
4. Questions are written in Japanese and English. **Answer all the questions.**
   F1-1, F1-2　　Linear Algebra, Calculus ………………… Pages 1 to 4
   F2-1, F2-2　　Algorithms and Data Structures ………… Pages 5 to 10
5. Write your answer in Japanese or English, unless otherwise specified.
6. Read carefully the notes on the Answer Sheets as well.

修士課程　情報学基礎　【線形代数、微分積分】　問題番号 F1－1

F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 1 以下で定義される実行列 A と B、および実数ベクトル $\boldsymbol{x}$ に関して、以下の問いに答えよ。ここで、$||\boldsymbol{x}||$ は $\boldsymbol{x}$ の長さを表す。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad ||\boldsymbol{x}|| > 0$$

(1) A^3 を求めよ。

(2) A^{-1} を求めよ。

(3) A^{15} を求めよ。

(4) $\lim_{n\to\infty} ||(AB)^n \boldsymbol{x}||$ を求めよ。ここで、n は自然数とする。

設問 2 $m \times n$ $(m > n)$ の実行列 A と以下で定義される行列 B と C を考える。 ここで、$^{\mathrm{T}}$ は転置を表すものとする。また、内積 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ を以下で定義する。ここで、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は l 次元ベクトル、a_k は $\boldsymbol{a}$ の k 番目の要素、b_k は $\boldsymbol{b}$ の k 番目の要素とする。

$$B = A^{\mathrm{T}} A \qquad C = A A^{\mathrm{T}} \qquad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \sum_{k=1}^{l} a_k b_k$$

以下の問いに答えよ。 必要であれば、実対称行列に関する以下の性質を使用せよ。

- 実対称行列の固有値は全て実数である。
- 実対称行列のどの固有値に対しても、実ベクトルからなる固有ベクトルをとることができる。

(1) B と C がともに実対称行列であることを示せ。

(2) B の全ての固有値が非負であることを示せ。

(3) 実対称行列は直交行列で対角化できる。B を対角化する直交行列の列ベクトルはいずれも B の固有ベクトルである。これらのうち正の固有値 λ_i, λ_j に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{p_i}$, $\boldsymbol{p_j}$ とし、$\boldsymbol{q_i}$ と $\boldsymbol{q_j}$ を $\boldsymbol{q_i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A\boldsymbol{p_i}$ と $\boldsymbol{q_j} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} A\boldsymbol{p_j}$ で与えられるベクトルとする。

$\boldsymbol{q_i}, \boldsymbol{q_j}$ が C の固有ベクトルであって対応する固有値はそれぞれ λ_i, λ_j であること、および $\langle \boldsymbol{q_i}, \boldsymbol{q_j} \rangle = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$ であることを示せ。また、$\boldsymbol{p_i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q_i}$ であることを示せ。

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.1 Answer the following questions about real matrices A and B, and a real vector $\boldsymbol{x}$ defined as follows, where $||\boldsymbol{x}||$ denotes the length of $\boldsymbol{x}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad ||\boldsymbol{x}|| > 0$$

(1) Calculate A^3.

(2) Calculate A^{-1}.

(3) Calculate A^{15}.

(4) Calculate $\lim_{n \to \infty} ||(AB)^n \boldsymbol{x}||$, where n is a natural number.

Q.2 Let A be an $m \times n$ $(m > n)$ real matrix. Let B and C be matrices defined as follows. Here, $^{\mathrm{T}}$ denotes the matrix transpose. We define an inner product $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ as follows, where $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ are l-dimensional vectors, a_k is the k-th element of $\boldsymbol{a}$, and b_k is the k-th element of $\boldsymbol{b}$.

$$B = A^{\mathrm{T}} A \qquad C = A A^{\mathrm{T}} \qquad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \sum_{k=1}^{l} a_k b_k$$

Answer the following questions. Use the following properties of a real symmetric matrix, if needed.

- All eigenvalues of a real symmetric matrix are real.
- For any eigenvalue of a real symmetric matrix, we can choose an eigenvector to be a real vector.

(1) Prove that both matrices B and C are real symmetric matrices.

(2) Prove that all the eigenvalues of B are non-negative.

(3) A real symmetric matrix can be diagonalized using an orthogonal matrix. All column vectors of an orthogonal matrix with which B is diagonalized are eigenvectors of B. Among these eigenvectors, let $\boldsymbol{p}_i$ and $\boldsymbol{p}_j$ be eigenvectors corresponding to positive eigenvalues λ_i and λ_j, respectively, and let $\boldsymbol{q}_i$ and $\boldsymbol{q}_j$ be vectors given by $\boldsymbol{q}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A \boldsymbol{p}_i$ and $\boldsymbol{q}_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} A \boldsymbol{p}_j$.

Prove that $\boldsymbol{q}_i$ and $\boldsymbol{q}_j$ are eigenvectors of C corresponding to eigenvalues λ_i and λ_j, respectively, and that $\langle \boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{q}_j \rangle = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$. Prove also that $\boldsymbol{p}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}_i$.

F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 1　以下の問いに答えよ。

(1) 以下の関数について、導関数を y のみを用いて表せ。また、その導関数の値域を示せ。

A) $y = f(x) = \frac{1}{1+\exp(-x)}$

B) $y = f(x) = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}$

(2) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 及び $0 \leq x, y \leq 1$ の条件の下、$f(x, y) = x^3 + 2y^3$ の極値を求めよ。

設問 2　地面に直立した半径 1[m] の円筒がある。ヤギの首に長さ π[m] の伸び縮みしないヒモが結び付けられている。このヒモのもう一端は円筒表面の一点（首と同じ高さ）に結び付けられている。

(1) 円筒の中心軸を原点とし、ヒモの結び付けられている円筒上の点を $(-1, 0)$ とする 2 次元座標系を地面上で考えたとき、$x \geq -1, y \geq 0$ において、ヤギがヒモをたるませずに立っているときの 2 次元座標を x 軸からの角度 θ を用いて表せ。

(2) このヤギがヒモをたるませずに円筒周りを一周したとき、その総移動距離を求めよ。

(3) このヤギが歩き回れる地面の面積を求めよ。

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.1 Answer the following questions.

(1) Express the derivative function for each of the following functions using only y and show the range of the derivative function.

A) $y = f(x) = \frac{1}{1+\exp(-x)}$

B) $y = f(x) = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}$

(2) Compute the extrema of $f(x, y) = x^3 + 2y^3$ when $x^2 + y^2 - 1 = 0$ and $0 \leq x, y \leq 1$.

Q.2 A cylinder of $1\,[\mathrm{m}]$ radius is erected perpendicularly on the ground. A goat is on a leash of $\pi\,[\mathrm{m}]$ that neither stretches nor compresses. The other end of the leash is tied to a surface point of the cylinder at the same height.

(1) Consider a two-dimensional coordinate frame with its origin at the center axis of the cylinder and where the point of attachment of the leash on the cylinder is $(-1, 0)$. Using angle θ from the x axis, express the 2D coordinates of the goat when she is standing without any slack to the leash for $x \geq -1, y \geq 0$.

(2) Derive the total distance the goat would travel when going around the cylinder once without any slack to the leash.

(3) Derive the total area of the ground the goat can cover.

F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 1　整数の集合 A の要素の小さい方から k 番目 ($k \geq 1$) の要素の値を返す関数 SelectKth(A,k) を考える。例えば、$A = \{5,1,7\}$ および $k = 2$ の場合、SelectKth(A,k) は 5 を出力する。 今、$p :=$ PivotSelect(A) は A に含まれる要素のうち一つをランダムに返す関数とし、$(L,R) :=$ Partition(A,p) は集合 A を p 以下の値で構成される集合 L と p より大きい値で構成される集合 R に分割する関数とする。例えば、$A = \{5,1,7\}$ および $p = 5$ の場合、$(L,R) :=$ Partition(A,p) の L および R はそれぞれ、$L = \{5,1\}$、$R = \{7\}$ となる。また、Remove(A,p) は集合 A から要素 p を削除する関数とする。例えば、$A = \{5,1,7\}$ および $p = 7$ の場合、Remove(A,p) は A を $\{5,1\}$ にする。$|X|$ は集合 X の要素数とし、A のすべての要素は異なるとする。

Algorithm 1 SelectKth(A,k). Find the k-th smallest element in A.

```
function SelectKth(A, k):
p := PivotSelect(A)
(L, R) := Partition(A, p)

if [ (a) ] then
  return p
end if
if [ (b) ] then
  if |R| = 0 then
    Remove(L, p)
  end if
  return SelectKth(L, [(c)])
end if
if [ (d) ] then
  return SelectKth(R, [(e)])
end if
```

(1) Algorithm1 は SelectKth 関数の疑似コードである。Algorithm1 の (a)–(e) を埋めよ。

(2) $|A| = n$ の場合の Partition(A,p)、Remove(L,p)、PivotSelect(A) の要素の比較回数をそれぞれ $O(n)$、$O(n)$、および $O(1)$ とする。Algorithm1 の平均比較回数をオーダー表記で答えよ。

（次のページに続く）

F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 2 4 つのリストを用いた外部ハッシュ法について以下の問いに答えよ。キーは $0, 1, 2$ のいずれかの整数が 4 つ並んだパターン $s_4 s_3 s_2 s_1, s_i \in \{0, 1, 2\}$ で与えられる。また以下において、 mod は割り算の余りを出力する演算子を示す。

(1) 表 1 は、ハッシュ関数 $\left(\sum_{i=1}^{4} 3^{i-1} s_i\right)$ mod 4 を用いて、キー 0100, 1211 を順に挿入した後のデータ構造を模式的に表している。この状態に追加で 0010, 2101, 1222, 1111 を順に挿入した後のデータ構造を表 1 に倣って図示せよ。

(2) k 個の要素で構成されるリストに、新たに要素を 1 つ追加するのに要するコストを ck (c は正の実定数) とする。表 2 に示す確率分布に従って独立に生起する複数個のキーをハッシュ法を用いて順に挿入していくとき、挿入コストの期待値が最小となるキーとハッシュ値の対応付けをその理由とともに示せ。対応付けは表 2 における (a), (b), (c), (d) を埋める形で解答せよ。

(3) (2) で求めた対応付けを $\left(\sum_{i=1}^{4} a_i s_i + a_5 s_1 s_2 + a_6 s_3 s_4\right)$ mod 4 なるハッシュ関数で実現するときの $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ を導出せよ。

表 1

インデックス	リスト
0	
1	0100 → 1211
2	
3	

表 2

キー	生起確率	ハッシュ値
0100	0.10	(a)
0210	0.20	(b)
1010	0.15	0
1101	0.15	1
1111	0.25	(c)
2101	0.15	(d)

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.1 We consider a function SelectKth(A, k) which returns the k-th ($k \geq 1$) smallest element in a set A whose elements are integers. For example, in $A = \{5, 1, 7\}$ and $k = 2$, SelectKth(A, k) returns 5. Now, we define a function $p :=$ PivotSelect(A) which returns a random element of A, and we define a function $(L, R) :=$ Partition(A, p) that divides a set A into a set L consisting of elements less than or equal to p and a set R consisting of elements greater than p. For example, in $A = \{5, 1, 7\}$ with $p = 5$, L and R of $(L, R) :=$ Partition(A, p) are given as $L = \{5, 1\}$ and $R = \{7\}$, respectively. We also define a function Remove(A, p) that removes the element p in the set A. For example, in $A = \{5, 1, 7\}$ with $p = 7$, Remove(A, p) changes A to $\{5, 1\}$. Note that we denote $|X|$ as the number of elements in the set X, and assume all elements of the set A are different.

Algorithm 1 SelectKth(A, k). Find the k-th smallest element in A.

```
function SelectKth(A, k):
p := PivotSelect(A)
(L, R) := Partition(A, p)

if [ (a) ] then
  return p
end if
if [ (b) ] then
  if |R| = 0 then
    Remove(L, p)
  end if
  return SelectKth(L, [(c)])
end if
if [ (d) ] then
  return SelectKth(R, [(e)])
end if
```

(1) Algorithm1 is a pseudo code of the SelectKth function. Fill (a)–(e) in Algorithm 1.

(2) For $|A| = n$, we assume that the number of element comparisons of Partition(A, p), Remove(L, p), and PivotSelect(A) are $O(n)$, $O(n)$, and $O(1)$, respectively. Answer the expected number of comparisons in Algorithm 1 by big-O notation.

(continued on the next page)

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.2 Answer the following questions about a hashing with 4 linked lists based on a separated chaining method. A key is given as a sequence of 4 integer numbers $s_4 s_3 s_2 s_1, s_i \in \{0, 1, 2\}$. $\bmod$ indicates an operator that derives a remainder of division.

(1) Consider a hash function $\left(\sum_{i=1}^{4} 3^{i-1} s_i\right) \bmod 4$. Table 1 shows the data structure after keys 0010 and 1211 are sequentially inserted to an empty state. Draw the data structure after 0010, 2101, 1222, and 1111 are additionally inserted in this order.

(2) Assume that it takes a cost ck for adding a new record to a list containing k records, where c is a positive constant. Consider sequentially inserting keys that independently occur following the probability distribution shown in Table 2. Show the correspondences between keys and hash values that minimize the expected cost taken for inserting a key, and explain its reasons. The correspondences must be answered by filling (a), (b), (c) and (d) in Table 2.

(3) Derive $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ in a hash function $\left(\sum_{i=1}^{4} a_i s_i + a_5 s_1 s_2 + a_6 s_3 s_4\right) \bmod 4$ that achieves the correspondences answered in the previous question.

Table 1

index	list
0	
1	0100 → 1211
2	
3	

Table 2

key	probability	hash value
0100	0.10	(a)
0210	0.20	(b)
1010	0.15	0
1101	0.15	1
1111	0.25	(c)
2101	0.15	(d)

設問2（Q. 2）の小問(1)の英語版の本文中において、以下の誤植がありました。
（誤）0010 and 1211
（正）0100 and 1211
なお、日本語版には誤りはありませんでした。

The description of problem (1) of Q. 2 in English contained the following typographical error.
(Error) 0010 and 1211
(Correct) 0100 and 1211
The corresponding problem description in Japanese did not have any errors.

F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

ナップサック問題の入力は、非負整数の容量 c を持つナップサックと、n 個のアイテム $a_1, a_2, \ldots, a_n$ からなる。各アイテム a_i は正整数の重さ w_i $(\leq c)$ と正整数の価値 p_i を持つ。アイテムの集合 S の合計重さと合計価値は、それぞれ S に含まれるアイテムの重さの総和、価値の総和と定義する。ナップサックには、合計重さ c 以下のアイテム集合を詰め込むことができる。ナップサックに詰め込むことのできるアイテム集合のうち合計価値が最大となるものをその入力に対する最適解、最適解の合計価値をその入力に対する最適値と呼ぶ。

$n = 6$, $c = 10$ で、アイテムが以下の表で与えられる入力を I とする。

アイテム	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
重さ w_i	2	3	3	4	4	5
価値 p_i	3	4	5	6	7	8

設問 1 入力 I に対する最適値と、全ての最適解を答えよ。

設問 2 アイテムを単位重さ当たりの価値が大きい順に「ナップサックに入れることができれば入れ、できなければ捨てる」という逐次処理をし、最後にナップサックに入っているアイテム集合を出力するアルゴリズムを考える。ただし、単位重さ当たりの価値が同じアイテムが複数あれば、価値の高いものを先に処理する。入力 I にこのアルゴリズムを適用させた場合の出力を答えよ。

設問 3 $n \leq 4$、$c = 10$ で、設問 2 のアルゴリズムが出力するアイテム集合の合計価値が最適値の 5 倍以上悪く（小さく）なる入力例を 1 つ示せ。また、最適解とアルゴリズムの出力を示すことにより、その答えが設問の要件を満たしていることを説明せよ。

設問 4 $1 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq c$ を満たす整数 i, j に対し、アイテムが $a_1, \ldots, a_i$ でナップサック容量が j である部分問題の最適値を $OPT(i, j)$ とする。上記の入力 I に対して $OPT(1, 1)$、$OPT(2, 4)$、$OPT(3, 5)$ の値を答えよ。

設問 5 設問 4 で定義した $OPT(i, j)$ を i や j の値が小さいものから順に計算していくアルゴリズムを考える。以下の問いに答えよ。なお本設問は、上記の具体的な入力 I に対してではなく一般の入力に対する問いであるので注意すること。

(1) $OPT(i, 0)$ の値を答えよ。

(2) $OPT(1, j)$ の値を答えよ。

(3) $i \geq 2$, $j \geq 1$ とし、$1 \leq a \leq i - 1$, $0 \leq b \leq j$ および $a = i$, $0 \leq b \leq j - 1$ を満たす全ての a, b について $OPT(a, b)$ が求まっているとする。このとき $OPT(i, j)$ を求める計算方法を答えよ。

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

An input of the knapsack problem consists of a *knapsack* with a nonnegative integer c, called the *capacity*, and n *items* $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Each item a_i has a positive integer w_i ($\leq c$), called the *weight*, and a positive integer p_i, called the *profit*. The *total weight* and the *total profit* of a set of items S are defined as the sum of the weights and the sum of the profits, respectively, of all the items in S. A set of items whose total weight is at most c can be packed into the knapsack. A set of items with the maximum total profit that can be packed into the knapsack is called an *optimal solution* of the input, and the total profit of an optimal solution is called the *optimal value* of the input.

Let I be the input with $n = 6$ and $c = 10$, where items are given in the following table.

Item	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Weight w_i	2	3	3	4	4	5
Profit p_i	3	4	5	6	7	8

Q.1 Show the optimal value and all the optimal solutions of the input I.

Q.2 Consider the following algorithm: sequentially process items in a non-increasing order of the profit per unit weight. When processing an item, put it into the knapsack if possible, and discard it otherwise. Finally, output the set of items in the knapsack. If there are two or more items with the same profit per unit weight, process the one with the largest profit first. Show the output when this algorithm is applied to the input I.

Q.3 Show an input with $n \leq 4$ and $c = 10$, where the total profit of the output of the algorithm defined in Q.2 is at least 5 times worse (smaller) than the optimal value. Also, explain why your answer meets the condition of this question by showing an optimal solution and the output of the algorithm.

Q.4 For integers i and j such that $1 \leq i \leq n$ and $0 \leq j \leq c$, let $OPT(i,j)$ be the optimal value of the restricted input where items are $a_1, \ldots, a_i$ and the capacity of the knapsack is j. Show $OPT(1,1)$, $OPT(2,4)$, and $OPT(3,5)$ for the above input I.

Q.5 Consider an algorithm that computes $OPT(i,j)$ defined in Q.4 from those for smaller i and j. Answer the following questions. Note that these questions are not for the specific input I defined above but for general inputs.

(1) Show $OPT(i,0)$.

(2) Show $OPT(1,j)$.

(3) Let $i \geq 2$ and $j \geq 1$, and assume that $OPT(a,b)$ is already computed for all a and b such that $1 \leq a \leq i-1$, $0 \leq b \leq j$ and $a = i$, $0 \leq b \leq j-1$. Show how to compute $OPT(i,j)$.

2021 年度 10 月期入学 / 2022 年度 4 月期入学
京都大学 大学院情報学研究科
修士課程 知能情報学専攻 入学者選抜試験問題
(専門科目)

2021 年 7 月 31 日 12:00～14:00

【注意】

1. 問題冊子はこの表紙を含めて 13 枚ある。
2. 試験開始の合図があるまで中を見てはいけない。
3. 試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷の不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
4. 問題は下記 6 題であり、日本語と英語の両方で出題されている。このうちいずれか **2 題を選択**し、解答しなさい。

5. 特に指定のない限り、日本語または英語で解答すること。
6. 解答用紙に記載されている注意事項についても留意すること。

The Japanese version of this document is the prevailing and authoritative version; the English translation below is provided for reference only

October 2021 Admissions / April 2022 Admissions
Entrance Examination for Master's Program
Department of Intelligence Science and Technology
Graduate School of Informatics, Kyoto University
(Specialized Subjects)

July 31, 2021
12:00 - 14:00

NOTES

1. This is the Question Booklet in 13 pages including this front cover.
2. Do not open the booklet until you are instructed to start.
3. After the examination has started, check the number of pages and notify proctors (professors) immediately if you find missing pages or unclear printings.
4. There are 6 questions, written in Japanese and English. The questions are classified as listed below. **Choose and answer 2 questions.**

5. Write your answer in Japanese or English, unless otherwise specified.
6. Read carefully the notes on the Answer Sheets as well.

設問 1 以下の認知心理学・認知神経科学における用語や概念について簡潔に説明せよ。図を用いてもよい。

(1) 紡錘状回顔領域 (fusiform face area)

(2) 数量認知におけるサビタイジング (subitizing in numerosity cognition)

(3) 自己受容感覚 (proprioception)

(4) 基本情動説 (basic emotions approach)

(5) 盲点における視知覚 (visual perception at the blind spot)

設問 2 脳活動計測における「侵襲性」について、脳波 (electroencephalography, EEG) と単一細胞記録 (single-cell recording) という計測手法を例に挙げて説明せよ。

設問 3 変化の見落とし (change blindness) について検討するために、次のような実験を行う。実験中、半数の試行では、図 1(a) のように、いくつかのオブジェクトを並べた画像と、そのうち 1 つのオブジェクトを鏡映反転させた画像を、空白画面をはさんで交互に繰り返し呈示する（画像呈示時間 250 ms、空白画面呈示時間 250 ms）。残り半数の試行では同一の画像が空白画面をはさんで繰り返し呈示される。実験参加者には鏡映反転したオブジェクト（変化オブジェクトと呼ぶ）を見つけたらボタンを押すように指示する。画像内の全体のオブジェクトの数を 1, 5, 9 個と変えて、最初の画像が呈示されてからボタン押しまでの時間（反応時間）を測定する。各試行は、実験参加者がボタンを押すか、一定時間が経過すると終了する。実験の結果、図 1(b) のように、変化オブジェクトが存在する試行において、全体のオブジェクトの数が増えると変化オブジェクトを見つけるまでの平均反応時間が長くなった。

(1) 変化の見落としはどのような現象であるかを説明せよ。また、この実験結果に基づき、変化の見落としの認知メカニズムについて考察せよ。

(2) 空白画面の呈示時間を 0 ms にして 2 枚の画像を交互に繰り返し呈示した場合、どのような結果になると考えられるか。理由もあわせて説明せよ。

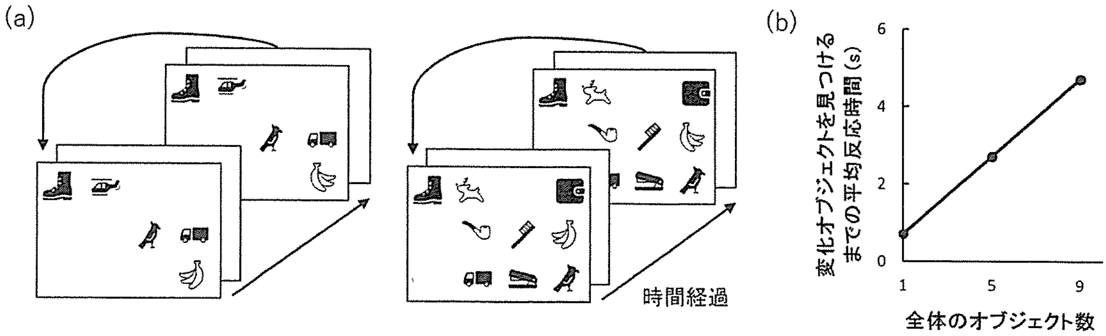

図 1 (a) 画像内の全体のオブジェクト数が 5 個、9 個の場合の変化の見落としの実験画像例。(b) オブジェクト数ごとの変化オブジェクトを見つけるまでの平均反応時間。

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Q.1 Give a brief explanation on each of the following items/concepts in cognitive psychology and cognitive neuroscience. Figures may be used.

(1) Fusiform face area

(2) Subitizing in numerosity cognition

(3) Proprioception

(4) Basic emotions approach

(5) Visual perception at the blind spot

Q.2 Explain "invasiveness" in brain activity measurement, using electroencephalography (EEG) and single-cell recording methods as examples.

Q.3 For investigating change blindness, the following experimental task is designed. As shown in Figure 1(a), in the half of the experimental trials, an image including some objects and a modified image, where one of the objects is mirror-reversed, are presented alternately and repeatedly (each image presentation: 250 ms), with a blank display (250 ms) inserted between the images. The remaining half of the experimental trials, one image is presented repeatedly with a blank display inserted between the images. Participants are asked to press a button when they detect a mirror-reversed object (named a changed object). The number of objects in an image is manipulated (1, 5, and 9 objects), and the response time (the time from the start of the image presentation to the button-press) is measured. The trials finish when participants press the button or when a certain amount of time has passed. The results are shown in Figure 1(b). The mean response time to detect the changed object increases as a function of the number of objects.

(1) Explain what change blindness is. In addition, speculate what the possible cognitive process underlying change blindness is, based on the results.

(2) What results do you expect, if the duration of a blank display between the images is 0 ms? Explain the expected results and the reason.

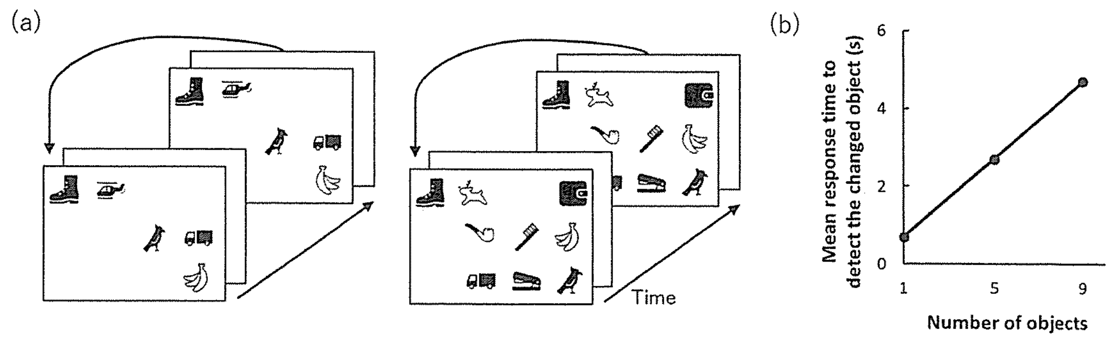

Figure 1. (a) Example of images used in a change blindness experiment (5 and 9 objects). (b) Mean response time to detect the changed object as a function of the number of objects.

設問 1　$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が互いに独立に正規分布 $\mathrm{N}\left(\mu,\, 4^2\right)$ に従う時、帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$、対立仮説 $\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$、有意水準 $\alpha = 0.05$ の片側検定を考える。確率変数 X が標準正規分布に従う時、確率 $\Pr\left[X \leq 1.645\right] = 0.95$ であることを用いてよい。

(1) $\mu - \mu_0 = 1.2, n = 16$ のときの検出力を考える。検出力は、確率変数 Z が標準正規分布に従う時、確率 $\Pr\left[Z \geq \mathrm{u}\right]$ として表わすことができる。そのときの u の値を求めよ。

(2) $\mu - \mu_0 = 1.2$ のとき検出力を 95% 以上にする n の最小値を答えよ。

設問 2　製造法 A と B があり、製造法 A では製品の不良率は p である。

(1) $p = 0.5$ のとき製造法 A で 8 個製造した。不良品が 1 個以下になる確率を求めよ。

(2) $p = 1/4000$ のとき製造法 A で 10,000 個製造した。不良品が発生しない確率を求めよ。また、ポアソン分布 $\Pr\left[X = r\right] = \lambda^r \exp(-\lambda)/r!$ を用いた近似により得られる確率を求めよ。

(3) 製造法 B で 100 個製造したところ不良品が 60 個であった。製造法 A の不良率が $p = 0.5$ のとき、製造法 B の不良率が製造法 A と異なるかを有意水準 $\alpha = 0.05$ で両側検定せよ。確率変数 X が標準正規分布に従う時、確率 $\Pr\left[X \leq 1.96\right] = 0.975$ であることを用いてよい。

設問 3　2 つの確率変数 X と Y に関して、期待値と分散が次のようになっている。

$$\mathbb{E}\left[X\right] = 3.0,\ \ \mathbb{E}\left[Y\right] = 4.0,\ \ \mathbb{E}\left[XY\right] = 12.3,\ \ \mathbb{V}\left[X\right] = 1.0,\ \ \mathbb{V}\left[Y\right] = 1.0$$

(1) X と Y のそれぞれの二乗の期待値 $\mathbb{E}\left[X^2\right], \mathbb{E}\left[Y^2\right]$ と X と Y の共分散 $\mathrm{Cov}[X, Y]$ を答えよ。

(2) X と Y にそれぞれ次の一次変換を施して新しい確率変数 U と V を作った。

$$U = 5X - 3,\ V = -3Y + 2$$

U と V の共分散 $\mathrm{Cov}\left[U, V\right]$ と相関係数 $\mathrm{r}\left[U, V\right]$ を答えよ。

Q.1 Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be independent observations from a normal distribution $\mathrm{N}\left(\mu,\ 4^2\right)$. Consider a one-tailed test performed with significant level $\alpha = 0.05$, under the null hypothesis $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$, and the alternative hypothesis $\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$. Note that $\Pr[X \leq 1.645] = 0.95$ when X follows the standard normal distribution.

(1) Consider the statistical power for $\mu - \mu_0 = 1.2$ and $n = 16$. The power can be calculated from the probability $\Pr[Z \geq \mathrm{u}]$, where the random variable Z follows the standard normal distribution. Answer the value of u.

(2) Assuming $\mu - \mu_0 = 1.2$, answer the minimum value of n that makes the power larger than 95%.

Q.2 Consider two manufacturing methods A and B. The defect rate of the method A is p.

(1) If $p = 0.5$, answer the probability of having no greater than one defective unit, when eight units are manufactured with A.

(2) If $p = 1/4000$, answer the probability of having no defective unit, when 10,000 units are manufactured with A. In addition, give the probability by the approximation using the Poisson distribution $\Pr[X = r] = \lambda^r \exp(-\lambda)/r!$.

(3) Suppose that the method B produces 60 defective units out of 100 units. Perform a two-tailed test to examine whether the defective rate of method B is the same as the defect rate of method A when $p = 0.5$. Note that $\Pr[X \leq 1.96] = 0.975$ when X follows the standard normal distribution.

Q.3 The expectations and variances of random variables X and Y are given as follows.

$$\mathbb{E}[X] = 3.0, \quad \mathbb{E}[Y] = 4.0, \quad \mathbb{E}[XY] = 12.3, \quad \mathbb{V}[X] = 1.0, \quad \mathbb{V}[Y] = 1.0$$

(1) Answer the expectations $\mathbb{E}[X^2]$ and $\mathbb{E}[Y^2]$ and the covariance $\mathrm{Cov}[X, Y]$.

(2) New random variables U and V are created by linear transformation on X and Y as follows.

$$U = 5X - 3, \ V = -3Y + 2$$

Answer the covariance $\mathrm{Cov}[U, V]$ and the correlation coefficient $\mathrm{r}[U, V]$.

2次元実数空間におけるデータ点(x, y)が、確率密度関数$f(x, y)$をもつ確率分布に従うとする。この確率分布は、クラス A と B に対応する 2 つの確率分布の混合分布であり、それぞれが以下の確率密度関数をもつ：

$$f_{\mathrm{A}}(x, y) = \frac{1}{\pi}\exp\left(-\frac{x^2}{a} - ay^2\right), \quad f_{\mathrm{B}}(x, y) = \frac{1}{\pi}\exp(-(x-2)^2 - (y-3)^2).$$

また、クラス A, B の事前確率（混合重み） $p_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{B}}$ は、それぞれ

$$p_{\mathrm{A}} = \frac{1}{1+\exp(b)}, \qquad p_{\mathrm{B}} = 1 - p_{\mathrm{A}}$$

とする。なお、aは正の実数定数、bは実数定数とする。

設問 1 クラス A に属することが予め分かっている 3 つのデータ点$(1,1), (2,2), (0,1)$が与えられたときの、aの最尤推定値を求めよ。

設問 2 $a = 1$とする。あるデータ点(x, y)がクラス A と B のいずれに属するかを、クラスの事後確率の大小を比較することで判定する。データ点(x, y)がクラス A に属すると判定する条件を与えよ。

設問 3 データ点$(1,1)$がクラス A に属する事後確率が、クラス A の事前確率と一致するときのaの値を求めよ。

設問 4 $a = 0.5$とする。2 つのデータ点 $(0,0), (1,2)$ が観測されたときの、bの最尤推定値を与えよ。なお、$\exp(-10) \approx 0$としてよい。

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

A data point (x, y) in a two-dimensional real space is generated by a probability distribution with a probability density function $f(x, y)$. Here, the probability distribution is a mixture of two distributions corresponding to class A and class B that respectively have the following probability density functions:

$$f_{\mathrm{A}}(x, y) = \frac{1}{\pi}\exp\left(-\frac{x^2}{a} - ay^2\right), \quad f_{\mathrm{B}}(x, y) = \frac{1}{\pi}\exp(-(x-2)^2 - (y-3)^2).$$

In addition, the prior probabilities (i.e., the mixture weights) of class A and class B are respectively given as

$$p_{\mathrm{A}} = \frac{1}{1+\exp(b)}, \qquad p_{\mathrm{B}} = 1 - p_A\,.$$

Note that a is a positive real constant, and that b is a real constant.

Q.1 Answer the maximum likelihood estimate of a, when three data points, $(1,1)$, $(2,2)$, and $(0,1)$, that are known to belong to class A, are given.

Q.2 Assume that $a = 1$. We determine whether a data point (x, y) belongs to class A or class B by comparing the posterior class probabilities. Answer the conditions for determining that the data point (x, y) belongs to class A.

Q.3 Find the value of a when the posterior probability that data point $(1,1)$ belongs to class A is equal to the prior probability of class A.

Q.4 Assume that $a = 0.5$. Answer the maximum likelihood estimate of b when the two data points, $(0,0)$ and $(1,2)$, are observed. Note that $\exp(-10) \approx 0$ may be used.

以下では, 実数 p が $0 < p \leq 1$ を満たすときに、$N(p)$ を $N(p) = \lceil -\log_2 p \rceil$ すなわち $-\log_2 p$ 以上の最小の整数、と定義する。たとえば、$N(\frac{1}{5}) = 3$、$N(\frac{1}{32}) = 5$ である。

情報源アルファベットが $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ であるような記憶のない定常情報源 S を考える。情報源 S が記号 a_i を発生させる確率を p_i と表し、

$$P_1 = 0, \qquad P_i = \sum_{k=1}^{i-1} p_k \qquad (i = 2, \ldots, n)$$

と定義する。さらに、$p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n > 0$ が成立していると仮定して、a_i の記号 0 と 1 による符号化 C を

$C(a_i)$: P_i を 2 進表現したときの $N(p_i)$ 桁目までの 0 と 1 の列

と定義する。たとえば、$P_i = \frac{3}{5}$ かつ $p_i = \frac{1}{5}$ であれば、$\frac{3}{5}$ の 2 進表現が $0.100\cdots$ であり、$N(\frac{1}{5}) = 3$ であるから、$C(a_i) = 100$ である。情報源 S の情報量を $H(S)$、平均符号長を $\overline{N}$ で表す。

設問 1　記号数が $n = 4$ であり、p_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ が以下のように与えられている場合に符号 $C(a_1), C(a_2), C(a_3), C(a_4)$ を求めよ。

$$p_1 = \frac{1}{3}, \qquad p_2 = \frac{1}{4}, \qquad p_3 = \frac{1}{4}, \qquad p_4 = \frac{1}{6}$$

設問 2　次の不等式が成り立つことを符号化 C の定義を用いることによって示せ。

$$H(S) \leq \overline{N} < H(S) + 1$$

設問 3　記号数が $n = 6$ であり、$H(S) = \overline{N}$ が成立するような数列 $p_1, p_2, \ldots, p_6$ をすべて与えよ。また、与えた数列の中で p_6 が最小のものについて、符号 $C(a_1), C(a_2), \ldots, C(a_6)$ を与えよ。

設問 4　$H(S) = \overline{N}$ が成立し、かつ、$p_1 = p_2 = \cdots = p_k = p_{k+1} = \cdots = p_n$ が成立するとき、C がハフマン符号になることを、C をハフマン符号として構成する過程を与えることにより示せ。

設問 5　$H(S) = \overline{N}$ が成立し、かつ、ある k $(1 < k < n)$ について

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_k > p_{k+1} = \cdots = p_n$$

が成立するとき、C がハフマン符号になることを、C をハフマン符号として構成する過程を与えることにより示せ。

In this question, for every real number p such that $0 < p \leq 1$, $N(p) = \lceil -\log_2 p \rceil$, that is, $N(p)$ denotes the least integer more than or equal to $-\log_2 p$. For example, $N(\frac{1}{5}) = 3$, and $N(\frac{1}{32}) = 5$.

Consider a stationary memoryless source S which has a source alphabet $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. The probability that the source S produces each symbol a_i is denoted by p_i. We assume that $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n > 0$. Let

$$P_1 = 0, \text{ and } P_i = \sum_{k=1}^{i-1} p_k \qquad (i = 2, \ldots, n).$$

For each a_i we define a code $C(a_i)$ consisting of 0 and 1 as

> $C(a_i)$: the sequenece of the binary representation of P_i rounded off to $N(p_i)$ after the decimal point.

For example, if $P_i = \frac{3}{5}$ and $p_i = \frac{1}{5}$, then $\frac{3}{5}$ is represented as $0.100\cdots$ in binary, and because $N(\frac{1}{5}) = 3$, $C(a_i) = 100$. The information of the source S is denoted by $H(S)$ and the average length of $C(a_1)$, $C(a_2)$, …, and $C(a_n)$ is denoted by $\overline{N}$.

Q.1 Let $n = 4$. Show $C(a_1)$, $C(a_2)$, $C(a_3)$, and $C(a_4)$ in the case that

$$p_1 = \frac{1}{3}, \qquad p_2 = \frac{1}{4}, \qquad p_3 = \frac{1}{4}, \qquad \text{and } p_4 = \frac{1}{6}$$

Q.2 By using the definition of the code C, prove that

$$H(S) \leq \overline{N} < H(S) + 1.$$

Q.3 Let $n = 6$. List all sequences $p_1, p_2, \ldots, p_6$ satisfying $H(S) = \overline{N}$. Moreover, for the sequence such that p_6 is the minimum in all of the sequences, show the codes $C(a_1)$, $C(a_2)$, …, $C(a_6)$.

Q.4 Assume that $H(S) = \overline{N}$ and $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$. Show that C is a Huffman code, by presenting the process of constructing C as a Huffman code.

Q.5 Assume that $H(S) = \overline{N}$ and there exists k $(1 < k < n)$ such that

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_k > p_{k+1} = \cdots = p_n.$$

Show that C is a Huffman code, by presenting the process of constructing C as a Huffman code.

$n \in \mathbb{Z}$ を離散時間インデックスとする。また、単位インパルス信号 $\delta[n]$ および単位ステップ信号 $u[n]$ を以下の通り定義する。

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & (n \neq 0) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

$$u[n] = \begin{cases} 0 & (n < 0) \\ 1 & (n \geq 0) \end{cases}$$

設問 1　以下の離散時間信号 $x[n]$ に対する z 変換 $X(z)$ を求めよ。

(1) $x[n] = 3\delta[n] - 2\delta[n-2] + 5\delta[n-4]$

(2) $x[n] = nu[n]$

設問 2　以下の伝達関数 $H(z)$ で定義されるシステムの安定性を判定し、対応する回路を図示せよ。また、逆 z 変換 $h[n]$ を求めよ。

(1) $H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$

(2) $H(z) = \dfrac{1 + 2z^{-1}}{2 - z^{-1}}$

設問 3　以下の離散時間信号 $x[n]$ に対する離散時間フーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ。ただし、ω は正規化角周波数とする。

(1) $x[n] = 3\delta[n] - 2\delta[n-2] + 5\delta[n-4]$

(2) $x[n] = u[n] - u[n-6]$

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Let $n \in \mathbb{Z}$ be a discrete-time index. The unit impulse signal $\delta[n]$ and the unit step signal $u[n]$ are defined as follows:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & (n \neq 0), \\ 1 & (n = 0), \end{cases}$$

$$u[n] = \begin{cases} 0 & (n < 0), \\ 1 & (n \geq 0). \end{cases}$$

Q.1 Compute the z-transform $X(z)$ of a discrete-time signal $x[n]$ given below.

(1) $x[n] = 3\delta[n] - 2\delta[n-2] + 5\delta[n-4]$

(2) $x[n] = nu[n]$

Q.2 Judge the stability of a system whose transfer function $H(z)$ is given below and draw the correponding circuit. In addition, compute the inverse z-transform $h[n]$.

(1) $H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$

(2) $H(z) = \dfrac{1 + 2z^{-1}}{2 - z^{-1}}$

Q.3 Compute the discrete-time Fourier transform $F(\omega)$ of a discrete-time signal $x[n]$ given below, where ω represents a normalized angular frequency.

(1) $x[n] = 3\delta[n] - 2\delta[n-2] + 5\delta[n-4]$

(2) $x[n] = u[n] - u[n-6]$

型なしラムダ計算では、構文 $(\lambda x.\, M)$ は x を拘束変数、M を本体とする関数を定義する。構文 $(M\ N)$ は関数 M を引数 N に適用する。適用は左結合であり、$f\ x\ y$ は $(f\ x)\ y$ である。括弧は結合順序を変えない限り省略できる。

ラムダ計算を用いて、真理値を以下のように定義する。

$\texttt{true} \equiv \lambda x.\lambda y.\, x$

$\texttt{false} \equiv \lambda x.\lambda y.\, y$

設問 1　$\texttt{cond} \equiv \lambda c.\lambda x.\lambda y.\, c\ x\ y$ と定義する。式 $\texttt{cond}\ \texttt{true}\ x\ y$ が x に簡約されることを示せ。

設問 2　論理和 (OR) を $\texttt{or} \equiv \lambda x.\lambda y.\, \boxed{}$ の形で実装せよ。or の実装には cond が有用だが、最終的な式は cond を含まないように簡約せよ。式は true と false の両方または一方を含んでもよい。

設問 3　or を真理値のすべての組合せに適用し、設問 2 の実装が正しいことを示せ。

次に LISP 方式のリストを以下のように構築する。

リスト () :: $\texttt{nil} \equiv \lambda x.\, \texttt{true}$

リスト (a) :: $\lambda l.\, l\ a\ \texttt{nil}$

リスト (a, b) :: $\lambda l.\, l\ a\ (\lambda l.\, l\ b\ \texttt{nil})$　以下同様

あわせて以下の操作を定義する。

$\texttt{head} \equiv \lambda l.\, l\ \texttt{true}$

$\texttt{tail} \equiv \lambda l.\, l\ \texttt{false}$

$\texttt{cons} \equiv \lambda h.\lambda t.\, (\lambda l.\, l\ h\ t)$

$\texttt{isempty} \equiv \lambda l.\, l\ (\lambda h.\lambda t.\, \texttt{false})$

設問 4　式 $\texttt{isempty}\ (\texttt{cons}\ a\ \texttt{nil})$ が false に簡約されることを示せ。

設問 5　$\texttt{fix} \equiv \lambda f.\, (\lambda x.\, f\ (\lambda y.\, x\ x\ y))\ (\lambda x.\, f(\lambda y.\, x\ x\ y))$ と定義する。
また、$\texttt{rec} = \lambda f.\lambda l.\, (\texttt{isempty}\ l)\ \texttt{nil}\ (f\ (\texttt{tail}\ l))$ とおく。
$\texttt{fix}\ \texttt{rec} = \lambda l.\, (\texttt{isempty}\ l)\ \texttt{nil}\ ((\texttt{fix}\ \texttt{rec})\ (\texttt{tail}\ l))$ を示せ。

設問 6　リストの少なくとも 1 個の要素が真であれば true を、そうでなければ false を返す any を実装せよ。これまでに定義した式は簡約せずに用いてよい。

In the untyped lambda calculus, the syntax $(\lambda x.\ M)$ defines a function with a bound variable x and a body M. The syntax $(M\ N)$ applies a function M to an argument N. Application is left-associative, and thus $f\ x\ y$ is $(f\ x)\ y$. Parentheses can be omitted as long as the omission does not change the order of association.

Using lambda calculus, we define the truth values as follows:

$\texttt{true} \equiv \lambda x.\lambda y.\ x$

$\texttt{false} \equiv \lambda x.\lambda y.\ y$

Q.1 We define $\texttt{cond} \equiv \lambda c.\lambda x.\lambda y.\ c\ x\ y$. Show that the expression $\texttt{cond}\ \texttt{true}\ x\ y$ reduces to x.

Q.2 Implement logical disjunction (OR) in the form of $\texttt{or} \equiv \lambda x.\lambda y.\ \boxed{}$.
cond is helpful to implement or, but the expression in final form must be reduced such that it does not include cond. The expression may include true and/or false.

Q.3 Show the correctness of the implementation of Q.2 by applying or to all combinations of truth values.

Next, we construct LISP-style lists as follows:

list () :: $\texttt{nil} \equiv \lambda x.\ \texttt{true}$

list (a) :: $\lambda l.\ l\ a\ \texttt{nil}$

list (a, b) :: $\lambda l.\ l\ a\ (\lambda l.\ l\ b\ \texttt{nil})$ and the same applies to longer lists.

We also define the following operations.

$\texttt{head} \equiv \lambda l.\ l\ \texttt{true}$

$\texttt{tail} \equiv \lambda l.\ l\ \texttt{false}$

$\texttt{cons} \equiv \lambda h.\lambda t.\ (\lambda l.\ l\ h\ t)$

$\texttt{isempty} \equiv \lambda l.\ l\ (\lambda h.\lambda t.\ \texttt{false})$

Q.4 Show that the expression $\texttt{isempty}\ (\texttt{cons}\ a\ \texttt{nil})$ reduces to false.

Q.5 We define $\texttt{fix} \equiv \lambda f.\ (\lambda x.\ f\ (\lambda y.\ x\ x\ y))\ (\lambda x.\ f(\lambda y.\ x\ x\ y))$.
Also, let $\texttt{rec} = \lambda f.\lambda l.\ (\texttt{isempty}\ l)\ \texttt{nil}\ (f\ (\texttt{tail}\ l))$.
Show that $\texttt{fix}\ \texttt{rec} = \lambda l.\ (\texttt{isempty}\ l)\ \texttt{nil}\ ((\texttt{fix}\ \texttt{rec})\ (\texttt{tail}\ l))$.

Q.6 Implement any that returns true if at least one element of a list is true, and false otherwise. You may use the above-defined expressions without reductions.