２０１９年度１０月期入学 / ２０２０年度４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻

入学者選抜　試験問題

【数学】

試験日時：２０１９年８月５日（月）　午前１０時００分より正午まで

問題冊子頁数（表紙、中表紙、裏表紙を除いて）：　５頁

注意：

（１）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（２）問題番号【Ｉ】の問１、問２，問題番号【II】の問１，問２のそれぞれについて別の解答用紙を使用して解答すること。その際、各解答用紙に試験科目名、問題番号【Ｉ】の問１、問２，問題番号【II】の問１，問２を忘れずに記入すること。

（３）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること）

（４）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【数学】

【I】

注意：**問 1**，**問 2** はそれぞれ別の解答用紙に解答すること．

問 1　$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f の表現行列が A であるとして，以下の設問に答えよ．ただし，a は実数とする．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

(i) 行列 A の階数 (ランク) が最小になる a の値を求めよ．また，このときの行列 A の階数を求めよ．

(ii) 行列 A の階数が最小になるとき，線形写像 f の核 (カーネル) を求めよ．また，このとき，f の像の正規直交基底を求めよ．

(iii) 行列 A が対角化できなくなる a の値を求めよ．

(iv) $a = 3$ のとき，行列 A は行列 B と相似であることを示せ．

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

（数学の問題は次ページに続く）

問2 以下の設問に答えよ．ただし，det は行列式，$\top$ は転置，行列の右上の -1 は逆行列を意味するものとし，問題文中の行列およびベクトルの成分，スカラーはすべて実数とする．また，n，m，l は正の整数とする．さらに，$m \times m$ 行列 S，$m \times l$ 行列 T，$l \times m$ 行列 U，$l \times l$ 正則行列 V について，$(m+l) \times (m+l)$ 行列 $\begin{bmatrix} S & T \\ U & V \end{bmatrix}$ と $S - TV^{-1}U$ が正則であれば，

$$\begin{bmatrix} S & T \\ U & V \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (S-TV^{-1}U)^{-1} & -(S-TV^{-1}U)^{-1}TV^{-1} \\ -V^{-1}U(S-TV^{-1}U)^{-1} & V^{-1} + V^{-1}U(S-TV^{-1}U)^{-1}TV^{-1} \end{bmatrix}$$

となる．

(i) 正則な $n \times n$ 行列 A，n 次元列ベクトル b，c，スカラー d について，以下が成り立つことを示せ．

$$\det \begin{bmatrix} A & b \\ c^\top & d \end{bmatrix} = (\det A) \times (d - c^\top A^{-1} b)$$

(ii) $n \geq 2$ とする．A を $n \times n$ 正定値対称行列とする．このとき，A^{-1} も $n \times n$ 正定値対称行列となり，スカラー $\alpha > 0$，$(n-1)$ 次元列ベクトル β，$(n-1) \times (n-1)$ 行列 Δ を用いて，

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta^\top \\ \beta & \Delta \end{bmatrix}$$

と表すことができる．$\tilde{A}$ を行列 A から最初の行と列を除いた $(n-1) \times (n-1)$ 小行列とするとき，

$$\tilde{A}^{-1} = \Delta - \frac{\beta\beta^\top}{\alpha}$$

となることを示せ．

(iii) 設問 (ii) の条件に加えて，$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^\top$，また，$x$ の $(n-1)$ 次元部分ベクトルを $\tilde{x} = [x_2, x_3, \ldots, x_n]^\top$ とする．このとき，二次形式 $x^\top A^{-1} x$ は x_1 について二次式となるが，その二次式の x_1 に関する最小値は $\tilde{x}^\top \tilde{A}^{-1} \tilde{x}$ となることを示せ．

（数学の問題は次ページに続く）

(iv) 正方行列 A_n を以下のように定義する．

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{bmatrix},\ \ldots,\ A_{n+1} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

いま，すべての n について A_n を正定値対称行列とするとき，$n \geq 2$ について，

$$\det A_{n+1} \leq \frac{(\det A_n)^2}{\det A_{n-1}}$$

となることを示せ．

（数学の問題は次ページに続く）

【II】

注意：各問題はそれぞれ別の解答用紙に解答すること.

問 1　xyz-空間上の有界な閉集合

$$D=\left\{(x,y,z):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq z,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ 0\leq z\leq 1\right\}$$

について考える. ただし, a,b は正の定数であるとする. 以下の設問に答えよ.

(i) 次のように変数 (r,θ,s) を変数 (x,y,z) に移す写像のヤコビ行列式を求めよ.

$$x=ar\cos\theta,\ y=br\sin\theta,\ z=s$$

ただし, $r\geq 0, 0\leq\theta\leq\pi/2$ であるとする.

(ii) 設問 (i) の写像によって xyz-空間上の集合 D に移される $r\theta s$-空間上の集合は

$$E=\{(r,\theta,s):0\leq r\leq \boxed{}, 0\leq\theta\leq\pi/2, 0\leq s\leq 1\}$$

と表される. このとき, 空欄 $\boxed{}$ に入る式を書け.

(iii) $\displaystyle\iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ を求めよ.

(iv) 以下の積分が有限となるような正の整数 ℓ,m,n の組のうち, $\ell+m\leq n$ を満たすものを全て求めよ.

$$\iiint_D \frac{x^\ell y^m}{z^n}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

(数学の問題は次ページに続く)

【数学】(続き)

問 2　数列 $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ を次のように定義する.

$$x_1 = 1, \quad x_n = \sin x_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

また, 2 つの実数値関数 f と g が, $\lim_{x \to 0} f(x)/g(x) = 0$ を満たすとき, ランダウの記法によって, $f(x) = o(g(x))$ と表記する. ただし, $f(x) = o(1)$ は, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ を意味するものとする. 以下の設問に答えよ.

(i) 次の不等式が成り立つことを (帰納法などにより) 示せ.

$$0 < x_{n+1} < x_n, \qquad n = 1, 2, \dots$$

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ の値を求めよ.

(iii) $\sin x$ のマクローリン展開を書け. ただし, x の 5 次以上の項は, ランダウの記法を利用してまとめて表記せよ.

(iv) 次式を満たす定数 a と b を求めよ.

$$\frac{1}{(\sin x)^2} = \frac{a}{x^2} + b + o(1)$$

(v) 設問 (ii) と (iv) の結果を利用して, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{x_{n+1}^2} - \dfrac{1}{x_n^2} \right)$ の値を導け.

(vi) 設問 (v) の結果を利用して, 次式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{n \to \infty} n x_n^2 = 3$$

(数学の問題はここまで)

２０１９年度１０月期入学 / ２０２０年度４月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程

システム科学専攻　入学者選抜　試験問題

【専門科目】

試験日時：平成３０年８月５日（月）　午後１時００分より同４時００分

問題冊子頁数（表紙、中表紙、裏表紙を除いて）：　９頁

選択科目：下記の科目のうち、２科目を選択し解答すること。

【論理回路】（３）　　【工業数学】（３）

【基本ソフトウェア】（２）　　【確率統計】（３）

【制御工学】（３）

なお（ ）内数字は解答用紙の最大使用枚数を示す。

注意：

（１）上記科目から２科目を超えて選択してはいけない。３科目以上選択した場合は、本専門科目の答案を無効にすることがある。<u>別紙の選択表への記入を忘れないこと</u>。

（２）すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

（３）解答は上記最大使用枚数に注意すること。対応する解答用紙に解答中の科目名を明記すること。なお各問題に注意書きがあればそれに従うこと。

（４）解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる上部を空白にしておくこと。（この上部は切り離すので、点線部分より下側を使用すること。）

（５）解答用紙は記入の有無にかかわらず持ち帰ってはならない。

【論理回路】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること.

問題 1

以下の設問に答えよ.

(1) 2 入力 NAND 素子のみを使い，NOT を実現する回路を図示せよ.

(2) 設問 (1) の結果を利用し，2 入力 NAND 素子のみを使用して 2 入力 OR を実現する回路を図示せよ.

問題 2

以下の状態遷移規則を持つ 6 進計数回路を考える.

$$(0,0,0) \rightarrow (1,0,0) \rightarrow (0,1,0) \rightarrow (1,1,0) \rightarrow (0,0,1) \rightarrow (1,0,1) \rightarrow (0,0,0) \rightarrow \cdots$$

状態を (Q_0, Q_1, Q_2) とし，この回路を $J_i, K_i (i = 0, 1, 2)$ を入力とする JK フリップフロップを用いて構成するとき，$J_0, K_0, J_1, K_1, J_2, K_2$ を Q_0, Q_1, Q_2 の最簡積和形論理式で表せ.

問題 3

図 1 の状態遷移図によって定義される順序回路を考える．図中の x/y の表記は入力 x に対する出力 y を示している．例えば，状態 A において入力 0 が与えられると 1 を出力し，状態 B に遷移する．以下の設問に答えよ.

(1) 状態遷移表と出力表を作成せよ.

(2) 状態の併合によって状態数を最小化した順序回路の状態遷移表と出力表を作成せよ．なお，併合ごとに併合前後の状態名の対応を明記し，それぞれの併合が可能である理由を述べよ.

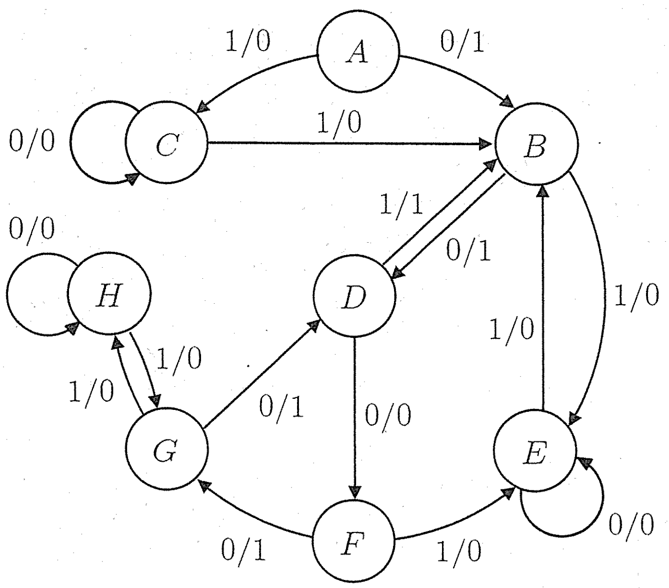

図 1: 状態遷移図

【工業数学】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

以下の問題において i は虚数単位, e は自然対数の底を表す．また複素数 z に対して $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$ はそれぞれ z の実部，虚部を表す．

問題 1 以下の設問に答えよ．

(1) 1 の 15 乗根のうち偏角が正で最小のものを $z(\neq 1)$ とする．以下の和を求めよ．

$$S_1 = \sum_{k=0}^{5} z^{3k} + \sum_{k=0}^{3} z^{5k}$$

(2) a を $a \neq \pm 1$ である実数，n を非負の整数とする．C_2 を複素平面において原点を中心とする単位円周を正の向きに一周する経路とする．以下の積分を求めよ．

$$I_2 = \int_{C_2} \frac{z^n}{(z-a)(1-az)}\, dz$$

(3) 図 1 の積分路 C_3 に沿った複素積分を利用して以下の積分を求めよ．

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)}$$

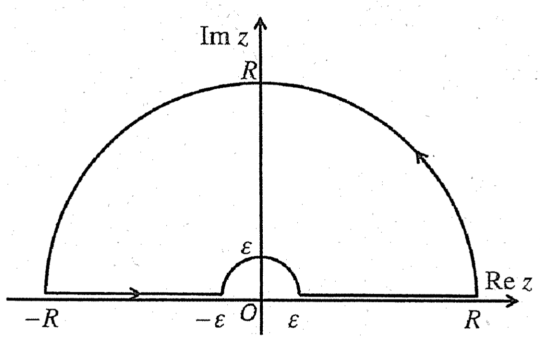

図 1: 積分路 C_3

（工業数学の問題は次ページに続く）

【工業数学】（続き）

問題 2 複素数を $z = x + yi$ とする．ここで x と y は実数とする．以下 (1),(2) に示す各関数が微分可能であるような z の集合，および z の近傍で正則であるような z の集合を各関数に対して示せ．

(1) $$f_1(z) = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$$

(2) $$f_2(z) = (x - y)^2 + (x + y + 1)^2 i$$

問題 3 以下の (1), (2) に示す集合の，関数

$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

による像が，複素平面においてそれぞれどのような図形となるか答えよ．

(1) 複素平面において原点を中心とする半径 $r > 0$ の円周．

(2) 複素平面において原点を通る半直線 $\ell = \{re^{i\theta} \,|\, r > 0\}$．ただし，$\theta$ は $\sin 2\theta \neq 0$ を満たす定数．

（工業数学の問題はここまで）

【基本ソフトウェア】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること.

問題1

以下に示すC言語の関数 f(a,n,m) は，n 要素 ($n > 0$) の配列 a のソート (sort) を，一種の基数ソート (radix sort) のアルゴリズム（基数 2^M, $M = 2^m$, $0 \leq m \leq 4$）により行うものである．ただし a の各要素は unsigned int 型の要素 key を持つ構造体 s へのポインタであり，ソートは key の値の昇順 (ascending order) で行われる．また unsigned int 型の整数データの最大値は $2^{32} - 1$ とする．この関数 f() と，f() から呼び出される関数 g() と h() について，設問 (1)〜(3) に答えよ．

```
unsigned int h(unsigned int k, int q, int r) { return((a)        ); }
void g(struct s **a, struct s **b, int *c, int n, int p, int q) {
  int i, s, t, r = 1<<p;
  for(i=0; i<r; i++)  c[i] = 0;
  for(i=0; i<n; i++)  c[h(a[i]->key, q, r)]++;
  for(i=0,s=0; i<r; i++) { t = c[i];  c[i] = s;  s += t; }
  for(i=0; i<n; i++)  b[(b)        ] = a[i];
  if (q==0)  return;
  for(i=0,t=0; i<r; i++) {
    int u = c[i] - t;
    if (u>0)  g((c)        , (d)        , (e)        , u, p, q-p);
    t = c[i];
  }
}
void f(struct s **a, int n, int m) {
  struct s **b = (struct s**)malloc(sizeof(struct s*)*n);
  int p = 1<<m,  q = 32-p;
  int *c = (int*)malloc(sizeof(int)<<(p+5-m));
  g(a, b, c, n, p, q);
  free(b);  free(c);
}
```

(1) 下線部 (a)〜(e) をC言語の式で埋めて，関数 g() と h() を完成させよ．なおその際，ソートに要する時間ができるだけ短くなるように配慮せよ．

(2) 関数 f() が用いているアルゴリズムの最悪時間計算量のオーダを，関数 f() の引数 n の値を N として求め，その理由を簡潔に示せ．なお引数 m の値は定数であるとみなしてよい．

(3) 関数 f() が用いているアルゴリズムは，key の値を上位桁から順に処理するが，下位桁から順に処理する基数ソートも良く用いられる．この両者を，作業領域量の大きさ，メモリの参照局所性 (access locality)，および安定性 (stability) の観点で，それぞれ比較しつつ両者の優劣を簡潔に議論せよ．

（基本ソフトウェアの問題は次ページに続く）

【基本ソフトウェア】(続き)

問題 2　オペレーティングシステムのページング方式に関する次の設問に答えよ．　ただし，参照列 A を 2, 3, 0, 0, 3, 0, 1, 1, 3, 2, 1, 2 とし，(a)〜(c)のページ置換えアルゴリズムは以下とする．

(a) 最長不使用（least recently used: LRU）
(b) 最低使用（least frequently used: LFU）
　ただし，使用回数が同じ場合は LRU に従う
(c) 先入れ先出し（first in first out: FIFO）

(1) 参照列 A に関して，(a)〜(c)の置換えアルゴリズムを用いた場合の置換え対象ページ枠内容の推移を表でそれぞれ示し，ページフォルト回数を求めよ．ただし，主記憶のページ枠を 3，初期状態を空とする．

(2) 設問(1)におけるページ置換えアルゴリズム(a)〜(c)の主記憶の平均アクセス時間をすべて求めよ．ただし，メモリのアクセス時間は 100 ns，ページフォルトの処理にかかる時間（ディスクからのデータ転送を含む）を 10 ms とする．

(3) 設問(2)の結果に基づき，ページフォルト回数とプログラム実行性能について論じよ．

（基本ソフトウェアの問題はここまで）

【確率統計】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること.

問題 1

確率変数 X の確率分布が以下の確率密度関数で与えられるとき，X の期待値と分散を求めなさい．μ は実定数である．

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \exp\left(-\frac{1}{2}(\log x - \mu)^2\right), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

（確率統計の問題は次ページに続く）

問題2

確率変数 X は確率密度関数

$$f(x;\mu) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}\exp\left(-\frac{x}{\mu}\right), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

の指数分布にしたがう．ただし $\mu > 0$ はパラメータである．以下の設問に答えなさい．

(1) パラメータ μ は未知とする．

(1-1) X に基づく μ の最尤推定量 $\hat{\mu}$ を求めよ．

(1-2) $\hat{\mu}$ が μ の不偏推定量であることを示せ．

(1-3) ある定数 $\mu_0 > 0$ に対して，帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$，対立仮説 $H_1 : \mu > \mu_0$ の仮説検定を有意水準 α $(0 < \alpha < 1)$ で行いたい．そのために定数 $c > 0$ を定めておき，$X > c$ のとき帰無仮説を棄却する．定数 c を求めよ．

(1-4) ある関数 $L : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を用いて集合 $S(x) = \{z \mid z \geq L(x)\} \subset \mathbb{R}$ を定義する．このとき $P(\mu \in S(X)) = 1 - \alpha$ となるように関数 $L(x)$ を定めよ．ただし $P(A)$ は事象 A の確率を表し，$0 < \alpha < 1$ は定数である．

(2) 機械 M は 2 個の部品で構成されており，M の運転開始から部品 i が故障するまでの経過時間を確率変数 X_i で表す $(i = 1, 2)$．X_1, X_2 は独立に確率密度関数 $f(x;\mu)$ の指数分布にしたがう．ただし $\mu = 1$ とする．

(2-1) 2 個の部品のいずれかが故障すると M は警告を発する．このとき，M の運転開始から M が警告を発するまでの経過時間を確率変数 U で表す．U の確率密度関数を求めよ．

(2-2) 2 個の部品が共に故障したら M は停止する．このとき，M の運転開始から M が停止するまでの経過時間を確率変数 V で表す．V の確率密度関数を求めよ．

(2-3) 上で定義した U, V の同時確率密度関数を求めよ．

(確率統計の問題はここまで)

【制御工学】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

問題1　図1のフィードバック制御系において，

$$P(s) = \frac{s+a}{s(s+2)}, \quad K(s) = b$$

とする．a, b は定数パラメータであり $b \neq 0$ とする．以下の設問に答えよ．

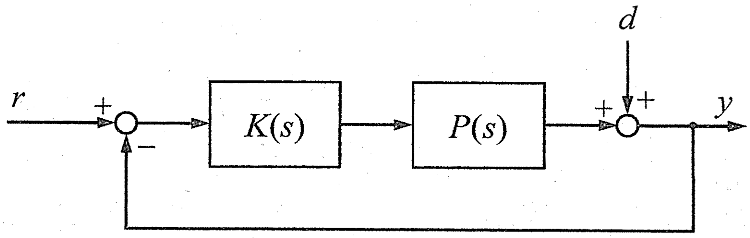

図1

(1) $a=1, b=4$ とし，外部入力が $r(t)=1, d(t)=0$ のとき，出力 $y(t)$ の応答を求めよ．

(2) フィードバック制御系が安定となるために (a,b) が満たすべき条件を求めよ．

(3) 外部入力が $r(t)=0, d(t)=\sin t$ のとき，定常応答が存在し，かつ定常応答における出力 $y(t)$ の最大値が 1 より小さくなるために (a,b) が満たすべき条件を求め，その範囲を図示せよ．図示にあたっては，境界線の交点や頂点があれば，それらの座標を明示すること．

（制御工学の問題は次ページに続く）

【制御工学】（続き）

問題 2　図 2 のフィードバック制御系について以下の設問に答えよ．

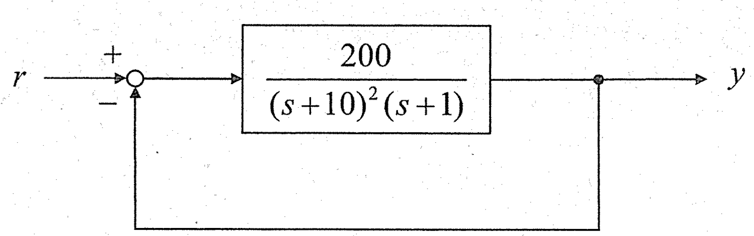

図 2

(1) 一巡伝達関数のゲイン線図を折れ線近似で描け．

(2) ナイキストの安定判別法により，閉ループ系が安定か否かを判定せよ．安定な場合はゲイン余裕を求めよ．ナイキスト軌跡には，実軸や虚軸と軌跡が交わる点の座標およびその時の角周波数の値を明示すること．

（制御工学の問題はここまで）