

令和4年7月12日修正

基礎数学 I

1

n を正の整数とする. 実数 $\beta_{k,n}$ および n 次多項式

$$b_{k,n}(x) = \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

を用いて, 高々 n 次の多項式 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \beta_{k,n} b_{k,n}(x)$$

によって定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

(i) 次の恒等式が成り立つことを示せ.

$$(a) \sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) = 1$$

$$(b) \sum_{k=0}^n k b_{k,n}(x) = nx$$

$$(c) \sum_{k=0}^n (k - nx)^2 b_{k,n}(x) = nx(1-x)$$

(ii) $\delta > 0$ および $x \in (0, 1)$ に対して,

$$\sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta} b_{k,n}(x) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

が成り立つことを示せ. ここで和の記号は, $\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta$ を満たす全ての k に対する和を表す.

(iii) f を区間 $[0, 1]$ 上の連続な実数値関数とし, $\beta_{k,n} = f(k/n)$ によって多項式列 $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ を定義する. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある正の整数 N で

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (n \geq N, x \in (0, 1))$$

を満たすものが存在することを示せ.

Correction: July 12, 2022

An English Translation:

Basic Mathematics I

1

Let n be a positive integer. We introduce a polynomial of degree at most n by

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \beta_{k,n} b_{k,n}(x),$$

where $\beta_{k,n} \in \mathbb{R}$ and the polynomial of degree n ,

$$b_{k,n}(x) = \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k},$$

for $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Answer the following questions.

(i) Prove the following identities:

$$(a) \sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) = 1,$$

$$(b) \sum_{k=0}^n k b_{k,n}(x) = nx,$$

$$(c) \sum_{k=0}^n (k - nx)^2 b_{k,n}(x) = nx(1-x).$$

(ii) Show that

$$\sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta} b_{k,n}(x) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

for $\delta > 0$ and $x \in (0, 1)$, where the summation symbol denotes the sum over k satisfying $\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta$.

(iii) Let f be a continuous real-valued function on the interval $[0, 1]$. By $\beta_{k,n} = f(k/n)$, we define the polynomial sequence $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Show that for any $\varepsilon > 0$ there exists a positive integer N such that

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (n \geq N, x \in (0, 1)).$$

アルゴリズム基礎

2

$G = (V, E)$ を節点集合 V , 枝集合 E から成る連結な単純無向グラフとし, G は隣接リストにより貯えられているとする. 二点 $u, v \in V$ 間の路の最短の長さを $\text{dist}(u, v)$ と記す. 以下の問いに答えよ.

- (i) 任意の点 $s \in V$ を選ぶ. $\text{dist}(s, u) = \text{dist}(s, v)$ を満たす枝 $uv \in E$ が存在すれば, 枝 uv は長さ奇数の単純閉路に含まれることを証明せよ.
- (ii) G が二部グラフであるかどうかを $O(|V| + |E|)$ 時間で判定する方法を示せ.
- (iii) 異なる二点 $s, t \in V$ に対して, s, t 間の最短路が唯一であるかどうかを $O(|V| + |E|)$ 時間で判定する方法を示せ.

An English Translation:

Data Structures and Algorithms

2

Let $G = (V, E)$ denote a simple connected undirected graph with a vertex set V and an edge set E . Assume that G is stored in adjacency lists. For two vertices $u, v \in V$, let $\text{dist}(u, v)$ denote the shortest length of a path between them. Answer the following questions.

- (i) Let $s \in V$ be an arbitrary vertex. Prove that if there is an edge $uv \in E$ such that $\text{dist}(s, u) = \text{dist}(s, v)$ then edge uv is contained in a simple cycle of an odd length.
- (ii) Show how to test whether G is a bipartite graph or not in $O(|V| + |E|)$ time.
- (iii) Let $s, t \in V$ be two distinct vertices. Show how to test whether G has only one shortest path between s and t or not in $O(|V| + |E|)$ time.

線形計画

3

\mathbf{a}^i ($i = 1, \dots, n$) と \mathbf{b} を m 次元ベクトル, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^\top$ を n 次元ベクトルする. ただし \top は転置記号を表す. さらに, \mathbf{A} を第 i 列が \mathbf{a}^i となる $m \times n$ 行列, つまり $\mathbf{A} = [\mathbf{a}^1 \ \mathbf{a}^2 \ \dots \ \mathbf{a}^n]$ とする.

次の線形計画問題 (P) とその双対問題 (D) を考える.

$$\begin{array}{ll} \text{(P) Minimize} & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{(D) Maximize} & \mathbf{b}^\top \mathbf{w} \\ \text{subject to} & \mathbf{A}^\top \mathbf{w} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

ただし, (P) の決定変数は $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, (D) の決定変数は $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ である.

問題 (P) は $x_1^* = 0$ となる唯一の最適解 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^\top$ を持つとする. このとき, 次の線形計画問題 (Q) を考える.

$$\begin{array}{ll} \text{(Q) Maximize} & \mathbf{b}^\top \mathbf{u} - (\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^*)v \\ \text{subject to} & (\mathbf{a}^1)^\top \mathbf{u} - c_1 v \leq -1 \\ & (\mathbf{a}^i)^\top \mathbf{u} - c_i v \leq 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n) \\ & v \geq 0 \end{array}$$

ただし, 決定変数は $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ と $v \in \mathbb{R}$ である.

以下の問いに答えよ.

- (i) 問題 (Q) の双対問題を書け.
- (ii) 問題 (Q) が最適解を持つことを示せ.
- (iii) 問題 (Q) の最適値が 0 となることを示せ.
- (iv) 問題 (Q) は $v^* > 0$ となる最適解 (\mathbf{u}^*, v^*) を持つとする. $\mathbf{w}^* = \frac{\mathbf{u}^*}{v^*}$ とする. このとき, \mathbf{w}^* は双対問題 (D) の最適解であることを示せ.
- (v) 問題 (Q) は $v^* = 0$ となる最適解 (\mathbf{u}^*, v^*) を持つとする. このとき, $(\mathbf{a}^1)^\top \mathbf{w}^* < c_1$ となる (D) の最適解 \mathbf{w}^* が存在することを示せ.

An English Translation:

Linear Programming

3

Let \mathbf{a}^i ($i = 1, \dots, n$) and \mathbf{b} be m -dimensional vectors, and let $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^\top$ be an n -dimensional vector, where the superscript \top denotes transposition. Moreover, let \mathbf{A} be an $m \times n$ matrix whose i th column is \mathbf{a}^i , that is, $\mathbf{A} = [\mathbf{a}^1 \ \mathbf{a}^2 \ \dots \ \mathbf{a}^n]$.

Consider the following linear programming problem (P) and its dual problem (D):

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \text{Minimize} \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \quad \quad \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(D)} & \text{Maximize} \quad \mathbf{b}^\top \mathbf{w} \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{A}^\top \mathbf{w} \leq \mathbf{c}, \end{array}$$

where the decision variables of (P) and (D) are $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ and $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$, respectively.

Suppose that problem (P) has a unique optimal solution $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^\top$ such that $x_1^* = 0$. Then consider the following linear programming problem (Q):

$$\begin{array}{ll} \text{(Q)} & \text{Maximize} \quad \mathbf{b}^\top \mathbf{u} - (\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^*)v \\ & \text{subject to} \quad (\mathbf{a}^1)^\top \mathbf{u} - c_1 v \leq -1 \\ & \quad \quad \quad (\mathbf{a}^i)^\top \mathbf{u} - c_i v \leq 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n) \\ & \quad \quad \quad v \geq 0, \end{array}$$

where the decision variables are $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ and $v \in \mathbb{R}$.

Answer the following questions.

- (i) Write out a dual problem of problem (Q).
- (ii) Show that problem (Q) has an optimal solution.
- (iii) Show that an optimal value of problem (Q) is 0.
- (iv) Suppose that problem (Q) has an optimal solution (\mathbf{u}^*, v^*) such that $v^* > 0$. Let $\mathbf{w}^* = \frac{\mathbf{u}^*}{v^*}$. Then show that \mathbf{w}^* is an optimal solution to problem (D).
- (v) Suppose that problem (Q) has an optimal solution (\mathbf{u}^*, v^*) such that $v^* = 0$. Then show that problem (D) has an optimal solution \mathbf{w}^* such that $(\mathbf{a}^1)^\top \mathbf{w}^* < c_1$.

線形制御理論

4

図1はフィードバック制御系を示す．ここで $P(s)$ は制御対象， $C(s)$ はPI補償器， r は参照入力， e は偏差である．制御対象 $P(s)$ と補償器 $C(s)$ は

$$P(s) = \frac{-s+2}{s^2+3s+2}, \quad C(s) = 1 + \frac{1}{Ts}$$

でそれぞれ与えられているとする．ただし $T > 0$ は積分時間である．以下の問いに答えよ．

- (i) フィードバック制御系が安定となる T の集合を求めよ．
- (ii) 参照入力を単位ランプ関数，すなわち $r(t) = t$ とする． $T > 0$ を変化させるとき，定常偏差の下限を求めよ．
- (iii) $T = 1$ とする．ゲイン余裕と位相余裕をそれぞれ g_m, ϕ_m で表す．このとき g_m と $\tan \phi_m$ を計算せよ．

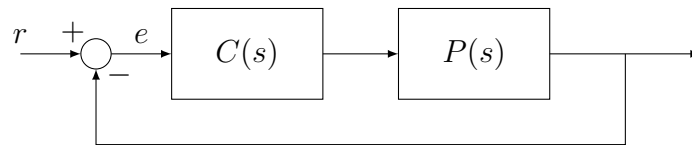


図1 フィードバック制御系

An English Translation:

Linear Control Theory

4

A feedback control system is shown in Figure 1, where $P(s)$ is a plant, $C(s)$ is a PI controller, r is a reference input, and e is an error. The plant $P(s)$ and the controller $C(s)$ are given by

$$P(s) = \frac{-s + 2}{s^2 + 3s + 2}, \quad C(s) = 1 + \frac{1}{Ts},$$

respectively, where $T > 0$ is the integration time. Answer the following questions.

- (i) Find the set of T for which the feedback control system is stable.
- (ii) Let the reference input be the unit ramp signal, that is, $r(t) = t$. Calculate the infimum of the steady state error when $T > 0$ varies.
- (iii) Let $T = 1$. Denote the gain margin and the phase margin by g_m and ϕ_m , respectively. Calculate g_m and $\tan \phi_m$.

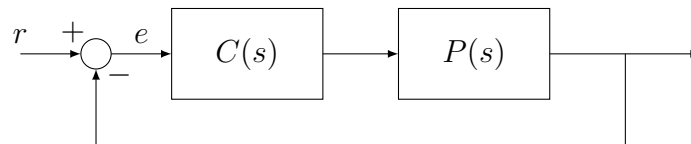


Figure 1 Feedback control system

基礎力学

5

ポテンシャル $V(r) = \frac{k}{r^n}$ ($k > 0, n \geq 1$) をもつ中心力による質量 m の粒子の散乱を考える. ここで, 力の中心から粒子までの距離を r とし, r の最小値を r_0 , 力の中心のまわりの角運動量の大きさを $h(> 0)$ とし, 無限遠方での粒子の速さを v_∞ とする. 以下の問いに答えよ.

(i) $r = r_0$ の時の粒子の速さ v_0 を求めよ.

(ii) 散乱角 Θ が

$$\Theta = \pi - 2 \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{u_0^2 - u^2 + \frac{2m}{h^2} [V(\frac{1}{u_0}) - V(\frac{1}{u})]}}$$

で与えられることを示せ. 但し, $u = \frac{1}{r}$, $u_0 = \frac{1}{r_0}$ とする.

(iii) ポテンシャルが $V(r) = \frac{k}{r}$ ($k > 0$) で与えられる場合の散乱の微分断面積を導出せよ.

An English Translation:

Basic Mechanics

5

Let us consider a particle of mass m scattering under the action of a central force by a potential $V(r) = \frac{k}{r^n}$ ($k > 0, n \geq 1$) where r denotes the distance between the particle and the center of the central force. Let r_0 be the minimal value of r , $h(> 0)$ be the magnitude of the angular momentum around the center of the central force and v_∞ be the speed of the particle at $r = \infty$. Answer the following questions.

- (i) Obtain the speed v_0 of the particle at $r = r_0$.
- (ii) Show that the scattering angle Θ is given by

$$\Theta = \pi - 2 \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{u_0^2 - u^2 + \frac{2m}{h^2} [V(\frac{1}{u_0}) - V(\frac{1}{u})]}}$$

where $u = \frac{1}{r}$ and $u_0 = \frac{1}{r_0}$.

- (iii) Derive the scattering differential cross section in the case that $V(r) = \frac{k}{r}$ where k is a positive constant.

基礎数学 II

6

以下の問いに答えよ.

(i) 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \\ -7 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

のランク (階数) r を求め, $\text{rank } B = r$ なる適当な $4 \times r$ 行列 B , $\text{rank } C = r$ なる $r \times 4$ 行列 C への分解 $A = BC$ を計算せよ.

(ii) n 本の m 次元列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ からなる $m \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

のランク r は $r < \min\{m, n\}$ であるものとする. このとき, 行列 A は, $\text{rank } B = r$ なる適当な $m \times r$ 行列 B , $\text{rank } C = r$ なる $r \times n$ 行列 C を用いて

$$A = BC$$

と分解されることを示せ.

An English Translation:

Basic Mathematics II

6

Answer the following questions.

- (i) Find the rank r of the 4×4 matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \\ -7 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

and a decomposition of A into a product $A = BC$, where B is a suitable $4 \times r$ matrix of rank r and C is an $r \times 4$ matrix of rank r .

- (ii) Let $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ be n column vectors of dimension m and let the $m \times n$ matrix

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

be of rank r with $r < \min\{m, n\}$. Show that the matrix A can be decomposed into a product

$$A = BC,$$

where B is a suitable $m \times r$ matrix of rank r and C is an $r \times n$ matrix of rank r .

応用数学

1

i を虚数単位とする. $f(z)$ を, K 個の整数ではない複素数 a_1, a_2, \dots, a_K を除いて正則な複素関数とする. $k = 1, \dots, K$ に対して, a_k は $f(z)$ の一位の極で, その留数を A_k とし, $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ とする. $N > \max_{k=1, \dots, K} |a_k|$ を満たす自然数 N に対し, Γ_N を $N + \frac{1}{2} + Ni, -N - \frac{1}{2} + Ni, -N - \frac{1}{2} - Ni, N + \frac{1}{2} - Ni$ をこの順に結んでできる長方形の経路とする. 以下の問いに答えよ.

(i) N によらない実数 M が存在して, Γ_N 上の z に対して,

$$|\cot \pi z| < M$$

が成り立つことを示せ. ただし, $\cot w = \frac{1}{\tan w}$ である.

(ii) 次式を示せ.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_N} f(z) \cot \pi z dz = 0.$$

(iii) 次式を示せ.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{k=1}^K A_k \cot \pi a_k.$$

(iv) c を 0 でない実数とする. 次式を示せ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + c^2} = \frac{\pi}{2c} \frac{e^{\pi c} + e^{-\pi c}}{e^{\pi c} - e^{-\pi c}} - \frac{1}{2c^2}.$$

An English Translation:

Applied Mathematics

1

Let i be the imaginary unit. Let $f(z)$ be a complex function which is holomorphic except at K non-integer, complex numbers a_1, a_2, \dots, a_K . Assume that a_k is a pole of order one and the residue of $f(z)$ at a_k is A_k for $k = 1, \dots, K$. Assume that $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$. For a positive integer N satisfying $N > \max_{k=1, \dots, K} |a_k|$, let Γ_N be the rectangular path connecting $N + \frac{1}{2} + Ni$, $-N - \frac{1}{2} + Ni$, $-N - \frac{1}{2} - Ni$ and $N + \frac{1}{2} - Ni$ in this order. Answer the following questions.

(i) Show that there is a real number M independent of N such that

$$|\cot \pi z| < M$$

holds for any z on Γ_N . Here $\cot w = \frac{1}{\tan w}$.

(ii) Show that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_N} f(z) \cot \pi z dz = 0.$$

(iii) Show that

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{k=1}^K A_k \cot \pi a_k.$$

(iv) Let c be a non-zero real number. Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + c^2} = \frac{\pi}{2c} \frac{e^{\pi c} + e^{-\pi c}}{e^{\pi c} - e^{-\pi c}} - \frac{1}{2c^2}.$$

グラフ理論

2

$G = (V, E)$ を節点集合 V , 枝集合 E から成る連結な単純無向グラフとし, 各枝 $e \in E$ には実数値の重み $w(e)$ が与えられているとする. G の全域木 $T \subseteq E$ に対して, 補木の枝 $a \in E \setminus T$ を含む T の基本閉路を $C_T(a)$, 木の枝 $b \in T$ を含む T の基本カットセットを $K_T(b)$ と書く. 以下の問いに答えよ.

(i) G の全域木 $T \subseteq E$ が最小木であるとき, 次の条件 (C) が成り立つことを証明せよ.

条件 (C): 補木の任意の枝 $a \in E \setminus T$ とその基本閉路の各枝 $b \in C_T(a)$ に対して

$$w(a) \geq w(b)$$

が成り立つ.

(ii) 条件 (C) を満たす任意の全域木 T は次の条件 (K) を満たすことを証明せよ.

条件 (K): 全域木 T の任意の枝 $b \in T$ とその基本カットセットの各枝 $a \in K_T(b)$ に対して

$$w(a) \geq w(b)$$

が成り立つ.

(iii) G の全域木 $T \subseteq E$ に対して条件 (K) が成り立つとき, T は最小木であることを証明せよ.

(iv) 次の命題が真であれば証明を, 偽であれば反例を与えよ.

「 G が最小木を二つ持つとき, G には同じ重みを持つ枝が少なくとも 2 本存在する。」

An English Translation:

Graph Theory

2

Let $G = (V, E)$ denote a simple and connected undirected graph with a vertex set V and an edge set E such that each edge $e \in E$ is weighted by a real value $w(e)$. For a spanning tree $T \subseteq E$ of G , let $C_T(a)$ denote the fundamental cycle containing an edge $a \in E \setminus T$, and $K_T(b)$ denote the fundamental cut-set containing an edge $b \in T$. Answer the following questions.

- (i) Prove that every minimum spanning tree $T \subseteq E$ of G satisfies the next condition (C).
(C): For every edge $a \in E \setminus T$, each edge $b \in C_T(a)$ satisfies $w(a) \geq w(b)$.
- (ii) Prove that any spanning tree T satisfying condition (C) also satisfies the next condition (K).
(K): For every edge $b \in T$, each edge $a \in K_T(b)$ satisfies $w(a) \geq w(b)$.
- (iii) Prove that any spanning tree $T \subseteq E$ of G satisfying condition (K) is a minimum spanning tree.
- (iv) Prove or disprove the next proposition, giving a proof or a counterexample.
“When G has two minimum spanning trees, some two edges in G have the same weight.”

オペレーションズ・リサーチ

3

以下の問 (i), (ii) に答えよ.

(i) 次の非線形計画問題を考える.

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & \theta(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} & \mathbf{x} \in X \end{array}$$

ただし, (P) の決定変数は $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ であり, $\theta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ と $X \subseteq \mathbb{R}^n$ は以下のように定義された目的関数と実行可能領域である.

$$\theta(\mathbf{x}) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}, \quad X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \ (i = 1, \dots, n) \right\}$$

問題 (P) は唯一の最適解 \mathbf{x}^* を持ち, 関数 θ は \mathbb{R}_{++}^n 上で凹関数 (すなわち, $-\theta$ は凸関数) であることが知られている. ただし, $\mathbb{R}_{++}^n = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0 \ (i = 1, \dots, n) \}$ である. 以下の (a), (b), (c) に答えよ.

- (a) 問題 (P) のカルーシュ・キューン・タッカー条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件) を書け. (問題 (P) が最大化問題であることに注意すること.)
- (b) 問題 (P) の最適解 \mathbf{x}^* を求めよ.
- (c) $\gamma_i \in \mathbb{R}, \gamma_i \geq 0 \ (i = 1, \dots, n)$ とする. 問題 (P) の最適解 \mathbf{x}^* を利用して, 以下の算術幾何平均の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \gamma_i \geq \left(\prod_{i=1}^n \gamma_i \right)^{1/n}$$

(ii) 正の整数 n に対して, \mathcal{F}_n を \mathbb{R}^n から \mathbb{R} への非負の凸関数の集合とする. 以下の (A), (B) に答えよ.

- (A) $f \in \mathcal{F}_n$ が与えられたとき, 関数 $g_f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を $g_f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})^2 \ (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$ と定義する. そのとき, 任意の $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ に対して, g_f が凸関数であることを示せ.
- (B) 正の数 $\alpha \in \mathbb{R}$ と $f \in \mathcal{F}_n$ が与えられたとき, 関数 $h_{f,\alpha}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を $h_{f,\alpha}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})^\alpha \ (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$ と定義する. そのとき, すべての $\alpha \geq \alpha^*$ と $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ に対して, $h_{f,\alpha}$ が凸関数であるような最小な $\alpha^* \in \mathbb{R}$ を求めよ. その際, α^* が最小であることを示せ.

An English Translation:

Operations Research

3

Answer the following questions (i) and (ii).

(i) Consider the following nonlinear programming problem:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & \theta(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} & \mathbf{x} \in X, \end{array}$$

where the decision variable is $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, the objective function $\theta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ and the feasible set $X \subseteq \mathbb{R}^n$ are defined by

$$\theta(\mathbf{x}) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \quad \text{and} \quad X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \ (i = 1, \dots, n) \right\},$$

respectively. It is known that the optimal solution \mathbf{x}^* of (P) is unique, and that the function θ is concave (that is, $-\theta$ is convex) on $\mathbb{R}_{++}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0 \ (i = 1, \dots, n)\}$. Answer the following questions (a), (b) and (c).

- (a) Write out the Karush-Kuhn-Tucker conditions of (P). (Note that (P) is a maximization problem.)
- (b) Obtain the optimal solution \mathbf{x}^* of (P).
- (c) By using the solution \mathbf{x}^* of (P), show that for all $\gamma_i \in \mathbb{R}$ with $\gamma_i \geq 0 \ (i = 1, \dots, n)$, the inequality of arithmetic and geometric means holds, that is,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \gamma_i \geq \left(\prod_{i=1}^n \gamma_i \right)^{1/n}.$$

(ii) Let n be a positive integer number and \mathcal{F}_n be the set of all convex and nonnegative functions from \mathbb{R}^n to \mathbb{R} . Answer the following questions (A) and (B).

- (A) For a given function $f \in \mathcal{F}_n$, define $g_f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ as $g_f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})^2 \ (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$. Prove that g_f is convex for all $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$.
- (B) For a given positive number $\alpha \in \mathbb{R}$ and a function $f \in \mathcal{F}_n$, define $h_{f,\alpha}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ as $h_{f,\alpha}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})^\alpha \ (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$. Obtain the minimum value of $\alpha^* \in \mathbb{R}$ such that $h_{f,\alpha}$ is convex for all $\alpha \geq \alpha^*$ and $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$. Justify your answer.

現代制御論

4

状態方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad y(t) = Cx(t)$$

により与えられる線形システムを考える．ただし， $x(t) \in \mathbb{R}^3$ は状態， $u(t) \in \mathbb{R}$ は制御入力， $y(t) \in \mathbb{R}$ は観測出力， $x_0 \in \mathbb{R}^3$ は初期状態である．また，

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad -1 \quad 2]$$

とし， \mathbb{R}^3 の二つの線形部分空間を

$$\mathcal{O} = \{x_0 : \text{任意の } t \text{ に対して } u(t) = 0 \text{ ならば, 任意の } t \text{ に対して } y(t) = 0\}$$

および

$$\mathcal{C} = \{[B \quad AB \quad A^2B]v : v \in \mathbb{R}^3\}$$

により定義する．以下の問いに理由とともに答えよ．

- (i) \mathcal{O} の基底および \mathcal{C} の基底をそれぞれ一つ求めよ．
- (ii) 線形独立なベクトルの組 $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ で $e_1 \in \mathcal{O}$ かつ $e_2 \in \mathcal{C}$ を満たすものを一つ求めよ．また， $T = [e_1 \quad e_2 \quad e_3] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ に対して， $Tz(t) = x(t)$ で与えられる $z(t)$ を状態変数としてもつ座標変換された状態方程式を求めよ．

- (iii) $x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ に対して，

$$J(u) = \int_0^\infty (y(t)^2 + u(t)^2) dt$$

を最小化する $u(t)$ を求めよ．

An English Translation:

Modern Control Theory

4

Consider a linear dynamical system given by the state equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad y(t) = Cx(t)$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^3$ is a state vector, $u(t) \in \mathbb{R}$ is a control input, $y(t) \in \mathbb{R}$ is an observation output, and $x_0 \in \mathbb{R}^3$ is an initial state. Let

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad -1 \quad 2].$$

Define two linear subspaces of \mathbb{R}^3 by

$$\mathcal{O} = \{x_0 : y(t) = 0 \text{ for all } t \text{ if } u(t) = 0 \text{ for all } t\}$$

and

$$\mathcal{C} = \{[B \quad AB \quad A^2B]v : v \in \mathbb{R}^3\}.$$

Answer the following questions. Show the derivation process.

- (i) Obtain a basis of \mathcal{O} and a basis of \mathcal{C} .
- (ii) Find a triplet of linearly independent vectors $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ such that $e_1 \in \mathcal{O}$ and $e_2 \in \mathcal{C}$. Then, obtain the coordinate transformed state equation having the state vector $z(t)$ such that $Tz(t) = x(t)$ with $T = [e_1 \quad e_2 \quad e_3] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.
- (iii) For $x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, find $u(t)$ that minimizes

$$J(u) = \int_0^{\infty} (y(t)^2 + u(t)^2) dt.$$

物理統計学

5

時系列 X_0, X_1, \dots は区間 $(-1, 1)$ 上の確率測度 $\mu(dx) = \frac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ を不変測度とするエルゴード的な力学系 $X_{n+1} = 2X_n^2 - 1$ により決定されるものとする。さらに

$$\int_{-1}^1 |B(x)|^2 \mu(dx) < \infty$$

を満足する任意の観測関数 $B(x)$ に対して,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} B(X_i) = \int_{-1}^1 B(X_0) \mu(dX_0) \quad \text{a.e.}$$

が成立するものとする。但し、 $X_i \in (-1, 1)$ ($i \geq 0$) である。 $\langle B \rangle$ は初期値 $X_0 = \cos(\theta_0)$ が不変測度 $\mu(dx)$ に従って分布する時の積分 $\int_{-1}^1 B(X_0) \mu(dX_0)$ と定義する。以下の問いに答えよ。

(i) $B(x) = x$ の時、 $\langle B \rangle = 0$ 及び $\langle B^2 \rangle = \frac{1}{2}$ であることを示せ。

(ii) $B(x) = 2x^2 - 1$ の時、 $\langle B \rangle = 0$ 及び $\langle B^2 \rangle = \frac{1}{2}$ であることを示せ。

(iii) $B(x) = (2x^2 - 1)x$ の時、 $\langle B \rangle = 0$ であることを示せ。

(iv) X_n の一般解を与えよ。

(v) $B(x) = a_0 + a_1x + a_2(2x^2 - 1)$ の時、 $\langle B \rangle = a_0$ 及び $\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2 = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)$ であることを示せ。

(vi) $B(x) = a_0 + a_1x + a_2(2x^2 - 1)$ に対して、1次元ランダムウォークを

$$r(N) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \{B(X_i) - \langle B \rangle\} \quad N = 1, 2, \dots$$

で構成した時、その拡散係数 $D \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle r^2(N) \rangle}{2N}$ を求めよ。

An English Translation:

Physical Statistics

5

Let a time series X_0, X_1, \dots be determined by an ergodic dynamical system $X_{n+1} = 2X_n^2 - 1$ with a probability measure $\mu(dx) = \frac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ on the interval $(-1, 1)$ being the invariant measure and assume that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} B(X_i) = \int_{-1}^1 B(X_0) \mu(dX_0) \quad \text{a.e.}$$

for any function $B(x)$ satisfying

$$\int_{-1}^1 |B(x)|^2 \mu(dx) < \infty,$$

where $X_i \in (-1, 1)$ ($i \geq 0$). $\langle B \rangle$ is defined as the integral $\int_{-1}^1 B(X_0) \mu(dX_0)$ with an initial condition $X_0 = \cos(\theta_0)$ being distributed according to the invariant measure $\mu(dx)$.

Answer the following questions:

- (i) Show that $\langle B \rangle = 0$ and $\langle B^2 \rangle = \frac{1}{2}$ for $B(x) = x$.
- (ii) Show that $\langle B \rangle = 0$ and $\langle B^2 \rangle = \frac{1}{2}$ for $B(x) = 2x^2 - 1$.
- (iii) Show that $\langle B \rangle = 0$ for $B(x) = (2x^2 - 1)x$.
- (iv) Give a general solution X_n .
- (v) Show that $\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2 = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)$ for $B(x) = a_0 + a_1x + a_2(2x^2 - 1)$.
- (vi) Let us construct a one-dimensional random walk defined by

$$r(N) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \{B(X_i) - \langle B \rangle\} \quad N = 1, 2, \dots$$

for $B(x) = a_0 + a_1x + a_2(2x^2 - 1)$. Obtain the diffusion coefficient $D \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle r^2(N) \rangle}{2N}$.

力学系数学

6

$a, b \in \mathbb{R}$ を定数として次の実微分方程式を考える.

$$t \frac{d^2 x}{dt^2} + (at + b) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1)$$

X を t の有理関数, 式 (1) の解およびそれらの高階導関数の有理式全体からなる集合とする. 特に, X は式 (1) の任意の解の 2 階導関数を含む. 次の条件を満たす全単射写像 $\sigma : X \rightarrow X$ 全体の集合を G で表す.

(A1) 任意の $f, g \in X$ に対して $\sigma(f + g) = \sigma(f) + \sigma(g)$ および $\sigma(fg) = \sigma(f)\sigma(g)$ が成立

(A2) 任意の有理関数 f に対して $\sigma(f) = f$ が成立

(A3) 任意の $f \in X$ に対して $\frac{d}{dt}\sigma(f) = \sigma\left(\frac{df}{dt}\right)$ が成立

$x = e^t$ が式 (1) の解であるとき, 以下の問いに答えよ.

(i) 定数 a, b を定めよ.

(ii) $x = e^t$ と 1 次独立な解 $x = \phi(t)$ を一つ求めよ.

(iii) $x(t)$ が解のとき $\sigma(x(t))$ も解であることを示せ.

(iv) $\phi(t)$ を (ii) で求めた解とする. (iii) により, 任意の $\sigma \in G$ に対して, ある定数 $a_{ij}(\sigma) \in \mathbb{R}$ ($i, j = 1, 2$) が存在して

$$\sigma(e^t) = a_{11}(\sigma)e^t + a_{12}(\sigma)\phi(t), \quad \sigma(\phi(t)) = a_{21}(\sigma)e^t + a_{22}(\sigma)\phi(t)$$

が成立する. 各 $i, j = 1, 2$ に対して (i, j) 成分が $a_{ij}(\sigma)$ の 2 次正方行列を $A(\sigma)$ と表す. このとき, 任意の $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ に対して $A(\sigma_1)A(\sigma_2) = A(\sigma_2)A(\sigma_1)$ が成立することを示せ.

An English Translation:

Mathematics for Dynamical Systems

6

Let $a, b \in \mathbb{R}$ be constants and consider the real differential equation

$$t \frac{d^2 x}{dt^2} + (at + b) \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (1)$$

Let X be the set of all rational expressions of rational functions of t , solutions to equation (1) and their derivatives of any order. In particular, X contains the second-order derivative of any solution to equation (1). Let $\sigma : X \rightarrow X$ be a bijective map satisfying the following conditions:

(A1) For any $f, g \in X$, $\sigma(f + g) = \sigma(f) + \sigma(g)$ and $\sigma(fg) = \sigma(f)\sigma(g)$;

(A2) For any rational function f , $\sigma(f) = f$;

(A3) For any $f \in X$, $\frac{d}{dt}\sigma(f) = \sigma\left(\frac{df}{dt}\right)$.

Let G denote the set of all such maps. Assume that $x = e^t$ is a solution to equation (1). Answer the following questions.

- (i) Determine the constants a and b .
- (ii) Obtain a solution $x = \phi(t)$ which is linearly independent of $x = e^t$.
- (iii) Show that $\sigma(x(t))$ is a solution if $x(t)$ is so.
- (iv) Let $\phi(t)$ be the solution obtained in (ii). From (iii) we see that for any $\sigma \in G$ there exist some constants $a_{ij}(\sigma) \in \mathbb{R}$ ($i, j = 1, 2$) such that

$$\sigma(e^t) = a_{11}(\sigma)e^t + a_{12}(\sigma)\phi(t), \quad \sigma(\phi(t)) = a_{21}(\sigma)e^t + a_{22}(\sigma)\phi(t).$$

Let $A(\sigma)$ be a 2×2 matrix whose (i, j) -element is $a_{ij}(\sigma)$ for $i, j = 1, 2$. Then show that $A(\sigma_1)A(\sigma_2) = A(\sigma_2)A(\sigma_1)$ for any $\sigma_1, \sigma_2 \in G$.