現代制御論

4

線形状態方程式

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

で記述されるシステムを考える．ただし，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, x_0 \in \mathbb{R}^n$ とする．対称行列 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を未知変数とする行列代数方程式

$$A^\top P + PA - PBB^\top P + I = 0 \tag{1}$$

を導入する．ただし，行列 A の転置行列を $A^\top$，ベクトル x の転置ベクトルとノルムをそれぞれ $x^\top$，$\|x\| = \sqrt{x^\top x}$ と表す．このとき以下の問いに答えよ．

(i) $ab \neq 0$ を満たす $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ に対して $n=2$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．このとき，システムが不可制御となる (a,b) に対して，(1) の正定解 P の個数を求めよ．

(ii) $B = 0$ とし，ある正定行列 P が (1) の解であるとする．このとき，任意の x_0 に対して $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$ であることを示せ．

(iii) ある P が (1) の解であるとする．このとき，任意の x_0 および $\tau > 0$ に対して

$$\int_0^\tau (\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2)dt = x_0^\top P x_0 - x(\tau)^\top P x(\tau) + \int_0^\tau \|u(t) + B^\top P x(t)\|^2 dt$$

が成り立つことを示せ．

(iv) $H = \begin{bmatrix} A & -BB^\top \\ -I & -A^\top \end{bmatrix}$ とするとき，λ が H の固有値ならば $-\lambda$ も H の固有値であることを示せ．

An English Translation:

Modern Control Theory

$\boxed{4}$

A linear system is described by the state equation

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu(t), \quad x(0) = x_0,$$

where $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, x_0 \in \mathbb{R}^n$. A matrix algebraic equation

$$A^\top P + PA - PBB^\top P + I = 0 \tag{1}$$

with respect to a symmetric matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is introduced. The transpose of a matrix A is denoted by $A^\top$. The transpose and the norm of a vector x are denoted by and $x^\top$ and $\|x\| = \sqrt{x^\top x}$, respectively. Answer the following questions.

(i) Let $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ with $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ such that $ab \neq 0$. Then, find the number of positive definite solution P to (1) for (a, b) which makes this system uncontrollable.

(ii) Suppose that $B = 0$ and that a positive defnite matrix P satisfies (1). Prove $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$ holds for any x_0.

(iii) Suppose that P is a solution to (1). Prove that

$$\int_0^\tau (\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2)dt = x_0^\top Px_0 - x(\tau)^\top Px(\tau) + \int_0^\tau \|u(t) + B^\top Px(t)\|^2 dt$$

holds for any x_0 and $\tau > 0$.

(iv) Define $H = \begin{bmatrix} A & -BB^\top \\ -I & -A^\top \end{bmatrix}$. Prove that for any eigenvalue λ of H, $-\lambda$ is also an eigenvalue of H.

物理統計学

$\boxed{5}$

エネルギーレベルが

$$E_n = h\nu\left(\frac{1}{2}+n\right) \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

なる振動数 $\nu(>0)$ の振動子系を考える．ここで $h(>0)$ は定数であり，エネルギーレベルの縮退は無く，同系の分配関数 Z は

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)$$

で与えられるとする．ただし，$k>0$ をボルツマン定数，T を絶対温度とする．以下の問いに答えよ．

(i) 分配関数 Z を計算せよ．

(ii) エネルギー E の期待値 $\langle E\rangle$ を求めよ．

(iii) 比熱 $C = \dfrac{d\langle E\rangle}{dT}$ を求めよ．

(iv) 比熱 C の低温極限 $(T\to 0)$ を求めよ．

(v) 比熱 C の高温極限 $(T\to\infty)$ を求めよ．

An English Translation:

Physical Statistics

$\boxed{5}$

Consider an oscillator system of a frequency ν with the energy levels

$$E_n = h\nu \left(\frac{1}{2} + n \right) \quad \text{for } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

where $h(> 0)$ is a constant and no energy level is degenerate. The distribution function Z of the system with the absolute temperature T is given by

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{kT} \right),$$

where $k(> 0)$ is the Boltzmann constant. Answer the following questions.

(i) Compute the distribution function Z.

(ii) Obtain the average energy $\langle E \rangle$.

(iii) Obtain the specific heat $C = \dfrac{d\langle E \rangle}{dT}$.

(iv) Obtain the specific heat C in the low temperature limit ($T \to 0$).

(v) Obtain the specific heat C in the high temperature limit ($T \to \infty$).

力学系数学

$\boxed{6}$

$a(t), b(t)$ を t のある有理式として次の実微分方程式を考える．

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)\frac{dx}{dt} + b(t)x = 0 \tag{1}$$

以下の問いに答えよ．

(i) $k \geqq 1$ をある整数として，$x = t^k$ が式 (1) の解であるための $a(t), b(t)$ に関する必要十分条件を求めよ．

以下では，ある整数 $k \geqq 1$ に対して (i) で求めた条件が成り立つものとし，$\phi(t)$ を t^k と線形独立な解として，

$$p(t) = t\frac{d\phi}{dt}(t) - k\phi(t)$$

とおく．

(ii) $a(t), b(t)$ を $p(t)$ を用いて表わせ．

(iii) $p(t) = t$ のとき $a(t), b(t)$ を定めよ．

(iv) 式 (1) のすべての解が定数でない多項式のとき，$a(t), b(t)$ は多項式でないことを示せ．

An English Translation:

Mathematics for Dynamical Systems

$\boxed{6}$

Let $a(t)$ and $b(t)$ be rational functions of t. Consider the real ordinary differential equation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)\frac{dx}{dt} + b(t)x = 0. \tag{1}$$

Answer the following questions.

(i) Obtain a necessary and sufficient condition on $a(t)$ and $b(t)$ for $x = t^k$ to be a solution to Eq. (1) for each integer $k \geqq 1$.

In the following, assume that the condition obtained in (i) holds for an integer $k \geqq 1$, and let

$$p(t) = t\frac{d\phi}{dt}(t) - k\phi(t),$$

where $\phi(t)$ is a solution which is linearly independent of t^k.

(ii) Write down $a(t)$ and $b(t)$ in terms of $p(t)$.

(iii) Determine $a(t)$ and $b(t)$ when $p(t) = t$.

(iv) Show that $a(t)$ and $b(t)$ are not polynomials if all solutions to Eq. (1) are nonconstant polynomials.