

2019 年度 10 月期入学 / 2020 年度 4 月期入学
京都大学 大学院情報学研究科
修士課程 知能情報学専攻 入学者選抜試験問題
(情報学基礎)

2019 年 8 月 5 日 9:00～11:00

【注意】

1. 問題冊子はこの表紙を含めて 9 枚ある。
2. 試験開始の合図があるまで中を見てはいけない。
3. 試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷の不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
4. 問題は日本語と英語の両方で出題されている。すべて解答しなさい。
F-1 (F-1-1, F-1-2) 線形代数、微分積分…………… 1-4 ページ
F-2 (F-2-1, F-2-2) アルゴリズムとデータ構造…………… 5-8 ページ
5. 特に指定のない限り、日本語または英語で解答すること。
6. 解答用紙に記載されている注意事項についても留意すること。

*The Japanese version of this document is the prevailing and authoritative version;
the English translation below is provided for reference only*

October 2019 Admissions / April 2020 Admissions
Entrance Examination for Master's Program
Department of Intelligence Science and Technology
Graduate School of Informatics, Kyoto University
(Fundamentals of Informatics)

August 5, 2019
9:00 - 11:00

NOTES

1. This is the Question Booklet in 9 pages including this front cover.
2. Do not open the booklet until you are instructed to start.
3. After the examination has started, check the number of pages and notify proctors (professors) immediately if you find missing pages or unclear printings.
4. Questions are written in Japanese and English. **Answer all the questions.**
F-1 (F-1-1, F-1-2) Linear Algebra, Calculus…………… Pages 1 to 4
F-2 (F-2-1, F-2-2) Algorithms and Data Structures…………… Pages 5 to 8
5. Write your answer in Japanese or English, unless otherwise specified.
6. Read carefully the notes on the Answer Sheets as well.

F-1-1 と F-1-2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

F-1-1

設問 1 以下の 2×2 正方行列 A について考える。

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) A の行列式を求めよ。
- (2) A の逆行列を求めよ。
- (3) A の固有値と対応する固有ベクトルをすべて求めよ。
- (4) A は正定値行列か判定せよ。理由も述べよ。
- (5) A を対角化せよ。

設問 2 任意の実対称行列について、以下の問いに答えよ。

- (1) すべての固有値が実数となることを証明せよ。
- (2) 異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交することを証明せよ。

(次のページに続く)

F-1-1 と **F-1-2** それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

F-1-2

設問 下記の問いに答えよ。

(1) 体積が一定な直円錐の側面積が最小となるのは、その高さで底面の半径の比がいくらのときか。

(2) 下記の積分を求めよ。

(2.1) $\int_0^1 \log(1 + \sqrt{x}) dx$

(2.2) $\iint_D (x^2 + y^2)^{-2} dx dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1\}$

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Use one answer sheet for each of **F-1-1** and **F-1-2**.

F-1-1

Q.1 We have a 2×2 square matrix **A** given by

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Answer the following questions.

- (1) Calculate the determinant of **A**.
- (2) Calculate the inverse matrix of **A**.
- (3) Calculate all the eigenvalue(s) and the corresponding eigenvector(s) of **A**.
- (4) Judge whether **A** is positive definite or not. Explain why.
- (5) Diagonalize **A**.

Q.2 Answer the following questions regarding an arbitrary real symmetric matrix.

- (1) Prove that all the eigenvalues are real numbers.
- (2) Prove that eigenvectors corresponding to distinct eigenvalues are orthogonal to each other.

(continued on the next page)

Use one answer sheet for each of F-1-1 and F-1-2.

F-1-2

Q. Answer the following questions.

(1) Consider a straight cone with a constant volume. What is the ratio of the height to the base radius that minimizes the lateral surface area?

(2) Compute the following integrals.

(2.1) $\int_0^1 \log(1 + \sqrt{x}) dx$

(2.2) $\iint_D (x^2 + y^2)^{-2} dx dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1\}$

F-2-1 と **F-2-2** それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

F-2-1

設問 以下の擬似コードで記述された関数 `func(A)` は数値配列 `A` を昇順にソートする。
`A, B, L, R` は数値配列であり、配列のインデックスは 0 から始まる。`A[x:y]` は `A[x]` から `A[y-1]` までの部分配列を表し、関数 `len(A)` は配列 `A` の長さを返す。`A.append(z)` は配列 `A` の末尾に数値 `z` を追加し、`print(A)` は配列 `A` の内容を出力し、`floor(z)` は `z` 以下の最大の整数を返す。例えば `A=[1,2,3]` のとき `len(A)=3`、`A[0:2]=[1,2]`、`A.append(4)` により `A=[1,2,3,4]` となる。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) `a`, `b`, `c`, `d` にふさわしいコードを答えよ。
- (2) `func([2,9,5,3,7,0,1,4])` を実行したとき、出力を出力順に答えよ。
- (3) このソートアルゴリズムの時間計算量を示し、その根拠を述べよ。

```

1 func(A) {
2     n = len(A)
3
4     if(n == 1) {
5         return A
6     }
7
8     m = floor(n / 2)
9     L = func(A[0:m])
10    R = func(A[m:n])
11
12    B = []
13    i = j = 0
14
15    while(a) {
16        if(i == len(L) and j < len(R)) {
17            B.append(b)
18            j = j + 1
19        } else if(j == len(R) and i < len(L)) {
20            B.append(c)
21            i = i + 1
22        } else if(d) {
23            B.append(L[i])
24            i = i + 1
25        } else {
26            B.append(R[j])
27            j = j + 1
28        }
29    }
30    print(B)
31    return B
32 }
```

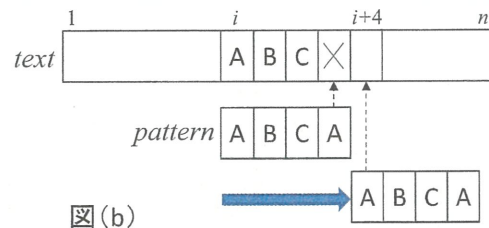
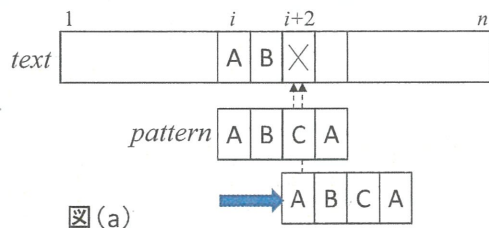
(次のページに続く)

F-2-1 と F-2-2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

F-2-2

設問 n 文字のテキスト文字列 ($text$) の先頭から順に、 m 文字のパターン文字列 ($pattern$) を探す問題を考える。

たとえば、図 (a) のように、 $text$ の位置 i から始まる文字列と $pattern$ “ABCA” を比較し、3 文字目が不一致であったとする。この時、あらかじめ $pattern$ の性質を調べておけば、 $pattern$ を 1 つ右にずらしても照合することはなく、 $pattern$ を 2 つ右にずらして、 $text$ の位置 $i+2$ から比較すればよいことがわかる。一方、図 (b) のように、4 文字目で不一致であった場合には、 $pattern$ を 4 つ右にずらして、 $text$ の位置 $i+4$ と $pattern$ の先頭の比較から再開すればよい。



(1) $pattern$ の位置 j で照合が失敗した時、 $pattern$ を最大何文字まで右にずらせるかを $shift[j]$ で表すこととする。図 (a) では $shift[3] = 2$ 、図 (b) では $shift[4] = 4$ である。次の $pattern$ について、 $shift[j]$ ($1 \leq j \leq 4$) の値を求めよ。

- (i) AAAB
- (ii) ABAC

(2) (1) の $pattern$ (ii) と $text$ “ABABBAABACA” との照合の過程を図示せよ。 $pattern$ と $text$ のどの文字が比較されて行くかを明示すること。

(3) このアルゴリズムの時間計算量を示せ。また、このアルゴリズムにおける比較の最大回数と、その具体例 ($pattern$ と $text$) を示せ。

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Use one answer sheet for each of F-2-1 and F-2-2.

F-2-1

Q. The following pseudo code of a function `func(A)` performs sorting of a numerical array `A` in ascending order. In this code, `A`, `B`, `L` and `R` are numerical arrays whose indices start from 0. `A[x:y]` denotes `A`'s subarray going from `A[x]` to `A[y-1]` and `A.append(z)` appends a number `z` to the end of `A`. The function `len(A)` returns the length of `A`, the function `print(A)` outputs the content of the array `A`, and the function `floor(z)` returns the greatest integer less than or equal to `z`. For example, when `A = [1, 2, 3]`, `len(A) = 3`, `A[0:2] = [1, 2]` and `A.append(4)` turns `A` into `[1, 2, 3, 4]`. Answer the following questions.

- Write appropriate code for `a`, `b`, `c` and `d`.
- Write the outputs in the order of execution when `func([2, 9, 5, 3, 7, 0, 1, 4])` is called.
- Describe the time complexity of the algorithm with the reason.

```

1 func(A) {
2     n = len(A)
3
4     if(n == 1) {
5         return A
6     }
7
8     m = floor(n / 2)
9     L = func(A[0:m])
10    R = func(A[m:n])
11
12    B = []
13    i = j = 0
14
15    while(a) {
16        if(i == len(L) and j < len(R)) {
17            B.append(b)
18            j = j + 1
19        } else if(j == len(R) and i < len(L)) {
20            B.append(c)
21            i = i + 1
22        } else if(d) {
23            B.append(L[i])
24            i = i + 1
25        } else {
26            B.append(R[j])
27            j = j + 1
28        }
29    }
30    print(B)
31    return B
32 }
```

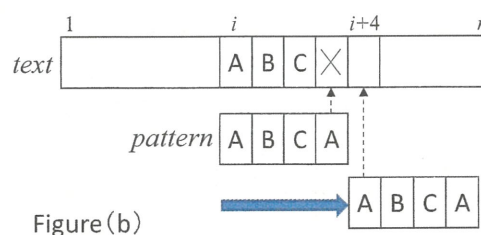
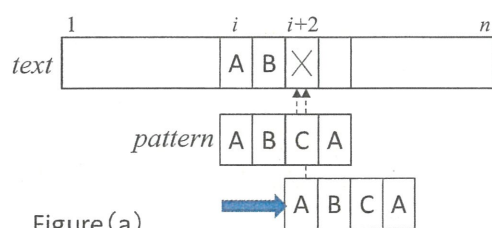
(continued on the next page)

Use one answer sheet for each of F-2-1 and F-2-2.

F-2-2

Q. Consider a string matching problem of finding a *pattern* string with length m from the head of a *text* string with length n .

For example, in the case of Figure (a), we compare a string from the position i of *text* with *pattern* "ABCA", and find that the third character does not match. If the characteristic of *pattern* is examined beforehand, we notice that shifting *pattern* to the right by one character would be waste of time; it is more efficient to shift *pattern* by two characters and to restart the matching at the position $i + 2$ of *text*. On the other hand, in the case of Figure (b), when the fourth character does not match, we can shift *pattern* by four characters, and restart the matching between the position $i + 4$ of *text* and the first position of *pattern*.



(1) We use $shift[j]$ to denote the maximum number of characters by which *pattern* can be moved to the right when a mis-matching occurs at the position j of *pattern*. In the case of Figure (a), $shift[3] = 2$; in the case of Figure (b), $shift[4] = 4$. Calculate the values of $shift[j]$ ($1 \leq j \leq 4$) for the following *patterns*:

- (i) AAAB
- (ii) ABAC

(2) Show the process of matching *pattern* (ii) of (1) with a *text* "ABABBAABACA". Clearly explain which characters in the *pattern* and the *text* are compared.

(3) Show the time complexity of the algorithm and the maximum number of character comparisons with a concrete example (*pattern* and *text*).

2019 年度 10 月期入学 / 2020 年度 4 月期入学
京都大学 大学院情報学研究科
修士課程 知能情報学専攻 入学者選抜試験問題
(専門科目)

2019 年 8 月 5 日 12:00~14:00

【注意】

1. 問題冊子はこの表紙を含めて 13 枚ある。
2. 試験開始の合図があるまで中を見てはいけない。
3. 試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷の不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
4. 問題は下記 6 題であり、日本語と英語の両方で出題されている。このうちいずれか **2 題** を選択し、解答しなさい。

S-1 認知神経科学、知覚・認知心理学	1-2 ページ
S-2 統計学	3-4 ページ
S-3 パターン認識と機械学習	5-6 ページ
S-4 情報理論	7-8 ページ
S-5 信号処理	9-10 ページ
S-6 形式言語理論、計算理論、離散数学	11-12 ページ
5. 特に指定のない限り、日本語または英語で解答すること。
6. 解答用紙に記載されている注意事項についても留意すること。

*The Japanese version of this document is the prevailing and authoritative version;
the English translation below is provided for reference only*

**October 2019 Admissions / April 2020 Admissions
Entrance Examination for Master's Program
Department of Intelligence Science and Technology
Graduate School of Informatics, Kyoto University
(Specialized Subjects)**

**August 5, 2019
12:00 - 14:00**

NOTES

1. This is the Question Booklet in 13 pages including this front cover.
2. Do not open the booklet until you are instructed to start.
3. After the examination has started, check the number of pages and notify proctors (professors) immediately if you find missing pages or unclear printings.
4. There are 6 questions, written in Japanese and English. The questions are classified as listed below. **Choose and answer 2 questions.**

S-1 Cognitive Neuroscience, Cognitive and Perceptual Psychology	Pages 1 to 2
S-2 Statistics	Pages 3 to 4
S-3 Pattern Recognition, Machine Learning	Pages 5 to 6
S-4 Information Theory	Pages 7 to 8
S-5 Signal Processing	Pages 9 to 10
S-6 Formal Language, Theory of Computation, Discrete Mathematics	Pages 11 to 12
5. Write your answer in Japanese or English, unless otherwise specified.
6. Read carefully the notes on the Answer Sheets as well.

設問 1 以下の用語について簡潔に説明せよ。図を用いても良い。

- (1) 経頭蓋磁気刺激法 (transcranial magnetic stimulation: TMS)
- (2) 網膜位置対応 (retinotopy)
- (3) ウェーバー・フェヒナーの法則 (Weber–Fechner law)
- (4) 視覚マスキング (visual masking)
- (5) ストロープ効果 (the Stroop effect)

設問 2 物体ベースの注意の機能を調べるために図 1 のような刺激を用いた実験を計画した。手がかり画面 (図 1a) が 100ms 提示されたのち、ターゲット画面 (図 1b) が提示される。実験参加者の課題は、図 1c の T1 から T4 で示された 4 箇所の位置のいずれかに提示されたターゲットが、X か O のいずれかであることを、それぞれのターゲット文字に割り当てられたキーを押すことによって回答することである。ターゲット画面の提示開始からキー押しまでの間の時間を反応時間として記録する。実験参加者は、試行中は、画面上の十字 (+) を注視するよう教示される。

- (1) この刺激において物体ベースの注意が働くとすると、4 箇所のターゲット (T1, T2, T3, T4) の反応時間はどのようになると予想されるか。予想される結果をグラフと文章を用いて説明せよ。なお、T1 と T3 の間の画面上の距離と、T1 と T4 の間の画面上の距離は等しいものとする。
- (2) 上記の結果の根拠を、物体ベースの注意に基づいて考察せよ。

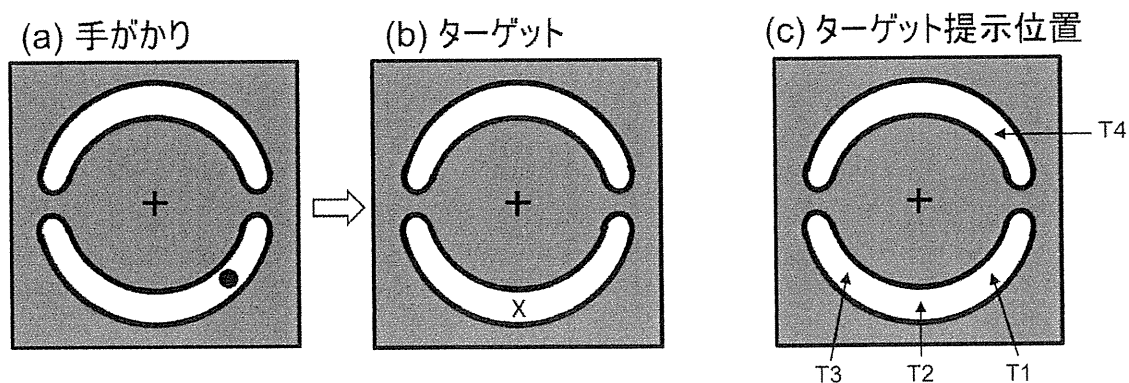


図 1. 実験で用いられた手がかり画面 (a) と ターゲット画面 (b) の例と、ターゲット提示位置 (c)

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Q.1 Give a brief explanation on each of the following items. Figures may be used.

- (1) Transcranial magnetic stimulation (TMS)
- (2) Retinotopy
- (3) Weber–Fechner law
- (4) Visual masking
- (5) The Stroop effect

Q.2 For investigating the function of object-based attention, the following experiment was designed. As shown in Figure 1, a cue display (Figure 1a) is presented for 100 ms, followed by a target display (Figure 1b). A target (either X or O) is presented at one of the four locations (T1, T2, T3, and T4 in Figure 1c). The task of participants is to discriminate the target by pressing one of the two keys assigned to the target letters. The time from the onset of a target display to pressing a key is measured as a reaction time. Participants are instructed to maintain fixation on the central cross on the displays throughout the trial.

- (1) If object-based attention works in the task, what is your prediction about the reaction times for the four target locations (T1, T2, T3, and T4)? Explain your prediction in words and a graph. Note that the distance between T1 and T3 is equivalent to that between T1 and T4.
- (2) Discuss the reason of your predicted result above in terms of the function of object-based attention.

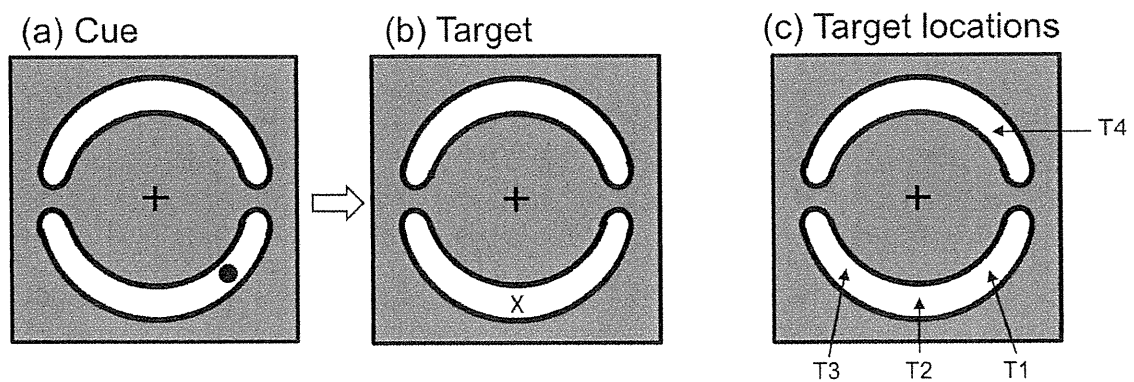


Figure 1. Examples of a cue display (a) and a target display (b) used in the experiment. (c) Potential target locations.

設問1 確率変数 X が $n = 4, p = 0.5$ の二項分布に従うとする。このとき、 $X = 2$ となる確率 $P(X = 2)$ の値を求めよ。

設問2 あるコインの表と裏が出る確率に偏りがあるかどうかを検定したい。このコインを5回投げたとき（独立試行）、表が1回、裏が4回出たとする。裏表に偏りが無いことを帰無仮説としたとき、この観測の P 値（両側検定）を求めよ。

設問3 有意水準 $\alpha = 0.05$ で n 個の独立な仮説を検定する際、すべてについて帰無仮説が正しいにもかかわらず、少なくとも1つの帰無仮説を棄却してしまう確率を求めよ。

設問4 平均 μ が未知、分散が既知で $\sigma^2 = 10$ の正規分布からサイズ5の標本を抽出したところ、平均は12であった。標準正規分布に従う確率変数 Y について、 $P(-1.96 \leq Y \leq 1.96) = 0.95$ が成り立つことを利用して、 μ の95%信頼区間を求めよ。

設問5 結果から見出した仮説を、あたかも事前に立てた仮説であるかのように提示する行為は、HARKing (Hypothesizing After the Results are Known)と呼ばれる。統計検定にもとづく研究においてHARKingが不適切である理由を、統計学用語を用いて説明せよ。

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

- Q.1 Consider a random variable X that follows the binomial distribution with $n = 4$ and $p = 0.5$. Compute the value of the probability $P(X = 2)$.
- Q.2 Consider testing whether there is a bias in the probabilities of the head and tail in a coin toss. Suppose that 5 independent trials of the coin toss resulted in 1 head and 4 tails. Compute the P -value of this observation (two-sided test), given the null hypothesis that there is no bias.
- Q.3 Consider testing n independent hypotheses with the significance level $\alpha = 0.05$. Find the probability of rejecting at least one null hypothesis when all the null hypotheses are correct.
- Q.4 Suppose that a sample of size 5 from the normal distribution with unknown mean μ and known variance $\sigma^2 = 10$ had a mean of 12. Estimate the 95% confidence interval of μ using the fact that $P(-1.96 \leq Y \leq 1.96) = 0.95$ where Y follows the standard normal distribution.
- Q.5 The practice of presenting a hypothesis informed by results as if it were an *a priori* hypothesis is termed HARKing (Hypothesizing After the Results are Known). Explain, using statistical terms, why HARKing is inappropriate in studies based on statistical testing.

設問1 D 次元ベクトル \mathbf{x} を入力とし、2 クラスに分類する問題を考える。 \mathbf{x} に関する一次関数 $g(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}$ (ただし定数項は便宜上省略) が正のときクラス 1、正でないとクラス 0 となるような重み \mathbf{w} を学習する。正解ラベル $y_i \in \{0, 1\}$ を含む N 個の学習データ $\{(\mathbf{x}_1, y_1), \dots, (\mathbf{x}_N, y_N)\}$ が与えられている。

- (1) $g(\mathbf{x})$ に対してしきい値関数 (ステップ関数) を適用したものが単純パーセプトロンと呼ばれる。パーセプトロン学習法における \mathbf{w} の更新式を示せ。
- (2) $g(\mathbf{x})$ に対して標準シグモイド関数を適用したものがロジスティック回帰と呼ばれる。この式を示せ。
- (3) 上記ロジスティック回帰の出力 $f(\mathbf{x})$ はクラス 1 の事後確率とみなせる。このとき $g(\mathbf{x})$ が、クラス 1 の事後確率とクラス 0 の事後確率の比の対数になることを示せ。
- (4) ロジスティック回帰の負の対数尤度は、 $-\sum_i \{y_i \log f(\mathbf{x}_i) + (1 - y_i) \log(1 - f(\mathbf{x}_i))\}$ で表される。これの勾配降下法による \mathbf{w} の更新式を示せ。また、(1) のパーセプトロン学習の更新式との関係を述べよ。
- (5) パーセプトロンあるいはロジスティック回帰を多数並列に用意し、これを多段に重ねることで、多層パーセプトロンないしはディープニューラルネットワーク (DNN) が構成できる。これを学習するための誤差逆伝播 (バックプロパゲーション) 法の概要を簡潔に述べよ。また、この学習法が適用できるための条件、及びしきい値関数を用いることができない理由を述べよ。

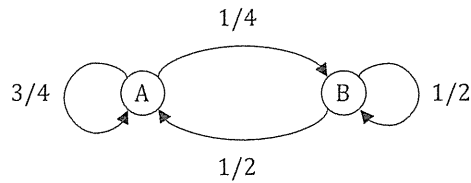
設問2 気象データ (気圧や雲の分布など) を入力とし、DNN によって天気を予測する問題を考える。

- (1) 以下の予測タスクに関して、出力層にどのような関数を用いるのが適当か、理由とともに述べよ。また、その式を示せ。
 - (a) 晴れ・曇り・雨・雪の 4 クラスの予測
 - (b) 降水確率の予測
 - (c) 降水量の予測
- (2) 上記の 3 つのタスクの DNN を別々でなく、あわせて学習する方法について、その意義とともに述べよ。

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

- Q.1 Let us consider a binary classification problem for an input D -dimensional vector \mathbf{x} . We will train the weights \mathbf{w} of a linear function $g(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}$ (a constant is omitted for convenience) such that \mathbf{x} is classified to class 1 when $g(\mathbf{x})$ is positive, and to class 0 otherwise. We are provided with N training samples $\{(\mathbf{x}_1, y_1), \dots, (\mathbf{x}_N, y_N)\}$ with their labels $y_i \in \{0, 1\}$.
- (1) Naïve perceptron is defined by applying a threshold function (step function) to $g(\mathbf{x})$. Show a formula based on the perceptron algorithm to update the weights \mathbf{w} .
 - (2) Logistic regression is defined by applying the standard sigmoid function to $g(\mathbf{x})$. Show the formula of this model.
 - (3) The output $f(\mathbf{x})$ of logistic regression is regarded as a posterior probability of the class 1. Show that $g(\mathbf{x})$ is equivalent to the logarithm of the ratio of the posterior probability of the class 1 and that of the class 0.
 - (4) The negative log likelihood of the logistic regression is given by $-\sum_i \{y_i \log f(\mathbf{x}_i) + (1 - y_i) \log(1 - f(\mathbf{x}_i))\}$. Show a formula based on the gradient descent method to update the weights \mathbf{w} . Explain its relationship with the formula of the perceptron algorithm presented in (1).
 - (5) Multi-layer perceptron or deep neural network (DNN) is constructed by preparing a set of perceptron or logistic regression models in parallel and cascading them in multiple layers. Briefly describe the error back-propagation algorithm to train this model. State the condition for this algorithm to apply and the reason why the threshold function cannot be used for it.
- Q.2 Let us consider a weather forecast problem using DNN given meteorological data such as distributions of the atmospheric pressure and clouds.
- (1) Describe an appropriate function of the output nodes for each of the following problems. Provide the reason and the formula.
 - (a) Prediction of four classes of “sunny,” “cloudy,” “rainy” and “snowy”
 - (b) Prediction of the chance of rain in percentage
 - (c) Prediction of precipitation amount
 - (2) Describe a method to train a DNN jointly for the above tasks with its merits.

設問 以下の状態遷移図で示される単純マルコフ情報源から出力される系列 $X_1, X_2, \dots, X_t, \dots$ がある。ここで $X_t \in \{A, B\}$ である。



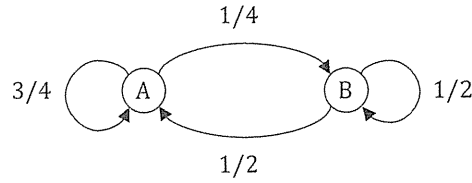
X_t は以下の通信路行列によって与えられる通信路を介して送信され、 $Y_t \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ が受信されるとする。

	α	β	γ
A	2/3	1/3	0
B	0	1/3	2/3

- (1) 上記の通信路の通信路容量を求めよ。
- (2) 受信した系列 Y_1, Y_2, \dots においてシンボル α, β, γ の出現回数を数える。十分な時間が経過したとき、シンボルを出現回数の多い順に並べよ。
- (3) マルコフ情報源のエントロピーレート $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} H(X_1, X_2, \dots, X_t)$ を求めよ。
- (4) $Y_t = \alpha$ のときの Y_{t+1} のエントロピー $H(Y_{t+1} | Y_t = \alpha)$ を求めよ。
- (5) $Y_t = \alpha$ かつ $Y_{t+2} = \gamma$ のときの Y_{t+1} のエントロピー $H(Y_{t+1} | Y_t = \alpha, Y_{t+2} = \gamma)$ を求めよ。

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Q. A sequence of symbols $X_1, X_2, \dots, X_t, \dots$ (where $X_t \in \{A, B\}$) is generated by the first-order Markov information source that the following state transition diagram gives.



Each X_t is transmitted through the channel given by the following channel matrix, and the receiver receives a code $Y_t \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

	α	β	γ
A	$2/3$	$1/3$	0
B	0	$1/3$	$2/3$

- (1) Give the capacity of the channel.
- (2) We count the numbers of the symbols α, β, γ appearing in the sequence of received symbols Y_1, Y_2, \dots . Give the order of the symbols in decreasing order after a sufficiently long time.
- (3) Give the entropy rate of the Markov information source: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} H(X_1, X_2, \dots, X_t)$.
- (4) Give the entropy of Y_{t+1} when $Y_t = \alpha$: $H(Y_{t+1} | Y_t = \alpha)$.
- (5) Give the entropy of Y_{t+1} when $Y_t = \alpha$ and $Y_{t+2} = \gamma$: $H(Y_{t+1} | Y_t = \alpha, Y_{t+2} = \gamma)$.

設問 1 連続時間信号 $x(t)$ を周期 T で標本化した信号 $x_s(t)$ は、周期 T の標本化パルス系列 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ を用いて $x_s(t) = x(t)\delta_T(t)$ で与えられるとする。ただし $\delta(t)$ は連続時間インパルス関数、 j は虚数単位である。以下の問いに答えよ。

(1) 連続時間インパルス信号 $\delta(t)$ を時間 T_0 だけ移動させた信号 $\delta(t - T_0)$ のフーリエ変換を求め、その振幅スペクトルと位相スペクトルを図示せよ。

(2) 標本化パルス系列 $\delta_T(t)$ のフーリエ級数展開が $\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t}$ となることを示せ。ただし $\omega_s = 2\pi/T$ とする。

(3) 標本化パルス系列 $\delta_T(t)$ のフーリエ変換を求め、その振幅スペクトルを図示せよ。

設問 2 離散フーリエ変換を、時間領域信号の標本値系列を表す N 次元ベクトル \mathbf{x} の、 $N \times N$ 行列 F_N による周波数領域 N 次元ベクトル \mathbf{X} への線形変換として $\mathbf{X} = F_N \mathbf{x}$ と定義する。ただし

$$F_N = \begin{pmatrix} W_N^0 & \cdot & \cdot & \cdot & W_N^{0(N-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & W_N^{kn} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ W_N^{(N-1)0} & \cdot & \cdot & \cdot & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}, W_N = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\right)$$

である。以下の問いに答えよ。

(1) \mathbf{x} が $N = 8$ 、サンプリング周波数 1000Hz の時間信号を表しているとき、離散フーリエ変換によって得られたベクトル \mathbf{X} の各要素 $X[0], X[1], \dots, X[7]$ が、それぞれどのような周波数 (Hz) の成分を表しているか説明せよ。

(2) 逆離散フーリエ変換 $\mathbf{x} = G_N \mathbf{X}$ を与える行列 $G_N = F_N^{-1}$ を導出せよ。

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Q.1 Let $x_s(t) = x(t)\delta_T(t)$ denote a continuous-time signal $x(t)$ sampled at interval T , where $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ is the sampling function of interval T . $\delta(t)$ denotes the continuous-time impulse function and j denotes the imaginary unit. Answer the following questions.

(1) The continuous-time impulse function shifted by time T_0 is given as $\delta(t - T_0)$. Give the Fourier transform of $\delta(t - T_0)$ and draw its amplitude and phase spectra.

(2) Show that the Fourier series expansion of the sampling function $\delta_T(t)$ is given by $\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t}$, where $\omega_s = 2\pi/T$.

(3) Give the Fourier transform of the sampling function $\delta_T(t)$ and draw its amplitude spectrum.

Q.2 Discrete Fourier transform of an N dimensional vector \mathbf{x} representing a time-domain sequence is defined as a linear transform $\mathbf{X} = F_N \mathbf{x}$, where F_N is an $N \times N$ matrix given by

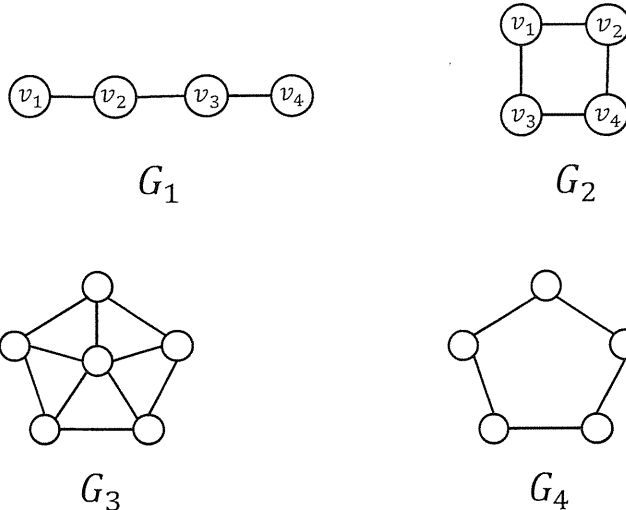
$$F_N = \begin{pmatrix} W_N^0 & \cdot & \cdot & \cdot & W_N^{0(N-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & W_N^{kn} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ W_N^{(N-1)0} & \cdot & \cdot & \cdot & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}, W_N = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\right).$$

Answer the following questions.

(1) Consider \mathbf{x} of $N = 8$ representing a time-domain signal sampled at 1000Hz and its discrete Fourier transform \mathbf{X} . Give the frequencies (in Hz) corresponding to each element of \mathbf{X} (i.e., $X[0], X[1], \dots, X[7]$).

(2) Derive the matrix $G_N = F_N^{-1}$ that provides the inverse discrete Fourier transform $\mathbf{x} = G_N \mathbf{X}$.

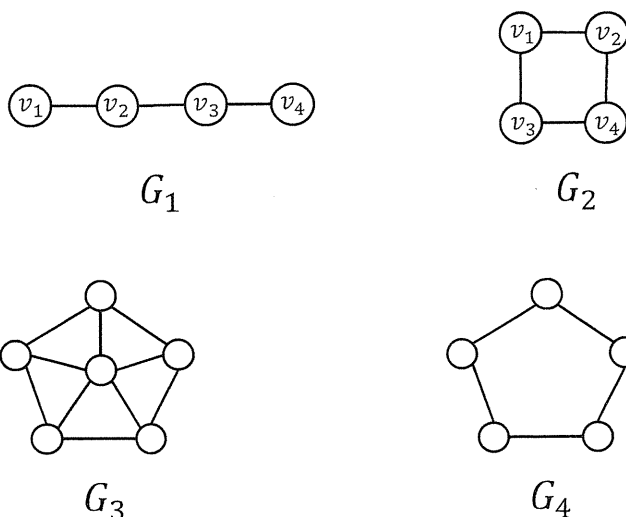
設問 本問題では頂点数 1 以上の単純無向グラフのみを取り扱う。正整数 k とグラフ $G = (V, E)$ に対し、 f を頂点集合 V から $\{1, 2, \dots, k\}$ への写像とする。任意の枝 $(v_i, v_j) \in E$ に対して $f(v_i) \neq f(v_j)$ が成り立つとき、 f を G の k -彩色と言う。 G が k -彩色を持つ最小の k を G の彩色数と言ひ、 $\chi(G)$ と書く。 $S \subseteq V$ に対して、 S で誘導される G の部分グラフを $G[S]$ と書き、 $G[S]$ 中の枝数を $e(G[S])$ と書く。任意の $S \subseteq V$ ($2 \leq |S| \leq 3$) に対して $|f(v_i) - f(v_j)| \geq e(G[S])$ を満たす $v_i, v_j \in S$ が存在するとき、 f を G の k -局所彩色と言う。 G が k -局所彩色を持つ最小の k を G の局所彩色数と言ひ、 $L(G)$ と書く。以下の G_1, G_2, G_3, G_4 は小問で使用されるグラフであり、 G_1 と G_2 の頂点内の記号は頂点名を表す。



- (1) グラフ G_1 および G_2 のそれぞれについて、4-彩色が何通りあるかを答えよ。
- (2) グラフ G_3 の彩色数 $\chi(G_3)$ の値を答えよ。また、 G_3 に対する $\chi(G_3)$ -彩色を 1 つ与えよ。彩色は、解答用紙に G_3 を描画し、その各頂点 v 内に $f(v)$ の値を記入することで与えよ。
- (3) グラフ G_4 の局所彩色数 $L(G_4)$ の値を答えよ。また、 G_4 に対する $L(G_4)$ -局所彩色を 1 つ、小問 (2) と同じ方法で与えよ。
- (4) $\chi(G) \neq L(G)$ が成り立つような頂点数最小のグラフを 1 つ図示せよ。また、それが $\chi(G) \neq L(G)$ を満たしている理由も述べよ。頂点数が最小である理由は述べなくて良い。
- (5) 命題「任意のグラフ G に対して $\chi(G) \leq L(G)$ が成り立つ。」は正しいか？ 解答用紙には、まず正しいか正しくないかを明記し、続いてその理由を述べよ。
- (6) K_n を n 頂点完全グラフとする。 $n \leq L(K_n) \leq 2n - 1$ であることを示せ。

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Q. In this question, we consider only simple undirected graphs having at least one vertex. For a positive integer k and a graph $G = (V, E)$, let f be a mapping from the set of vertices V to $\{1, 2, \dots, k\}$. If $f(v_i) \neq f(v_j)$ holds for any edge $(v_i, v_j) \in E$, f is called a **k -coloring** of G . The smallest k such that G has a k -coloring is called the **chromatic number** of G and denoted by $\chi(G)$. For $S \subseteq V$, $G[S]$ denotes the subgraph of G induced by S , and $e(G[S])$ denotes the number of edges in $G[S]$. If, for any $S \subseteq V$ ($2 \leq |S| \leq 3$), there exist $v_i, v_j \in S$ such that $|f(v_i) - f(v_j)| \geq e(G[S])$, then f is called a **local k -coloring** of G . The smallest k such that G has a local k -coloring is called the **local chromatic number** of G and denoted by $L(G)$. The following G_1, G_2, G_3 , and G_4 are graphs used in the questions, where the labels of vertices in G_1 and G_2 represent their names.



- (1) For each of G_1 and G_2 , give the number of 4-colorings.
- (2) Give the chromatic number $\chi(G_3)$ of G_3 . Also, give a $\chi(G_3)$ -coloring of G_3 . For giving a coloring, draw G_3 on your answer sheet, and write the value of $f(v)$ inside each vertex v .
- (3) Give the local chromatic number $L(G_4)$ of G_4 . Also, give a local $L(G_4)$ -coloring of G_4 . For giving a local coloring, do the same as in question (2).
- (4) Draw a graph G with the minimum number of vertices that satisfies $\chi(G) \neq L(G)$. Also, explain why your answer satisfies $\chi(G) \neq L(G)$. You do not need to give a reason for the number of vertices being minimum.
- (5) Is the proposition "For any graph G , $\chi(G) \leq L(G)$ holds." correct? To answer this question, first mention whether it is correct or not, and subsequently give a reason.
- (6) Let K_n be the complete graph with n vertices. Show that $n \leq L(K_n) \leq 2n - 1$.