

平成 31 年度 4 月期 / 平成 30 年度 10 月期

京都大学大学院情報学研究科修士課程
先端数理科学専攻

入学者選抜試験問題

【基礎科目】

平成 30 年 7 月 14 日 10:00 - 11:30

- (1) 指示があるまで問題を見てはならない。
- (2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。
- (3) 解答時間は 1 時間 30 分である。退室は認めない。
- (4) 基礎科目は全部で 5 題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から 3 題選択して解答すること。4 題以上選択した場合は、問題番号の若い順に 3 題のみ採点を行う。
- (5) 各受験者に対し、解答用紙 3 枚と下書用紙 (計算用紙) が配布される。開始後、解答用紙の全てに受験番号と氏名を記入すること。
- (6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答用紙 1 枚につき 1 題を解答すること。
解答用紙の裏面を用いる場合は、解答用紙の指示に従って解答すること。
- (7) 解答用紙 3 枚全てを提出すること。2 題以下しか選択していない場合でも、選択予定の問題番号を記入し、必ず 3 枚の解答用紙を提出すること。
- (8) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1 次の各問に答えよ.

(1) 4行4列の行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 3 & 7 & -11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

で定義する. A の rank (階数) を求めよ.

(2) 3行3列の行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 3 \\ -3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

で定義する. B^{10} を求めよ.

2 3行3列の行列 C を

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する. 次の各問に答えよ.

(1) 行列 C の固有値を全て求めよ.

(2) 直交行列 P で $P^{-1}CP$ が対角行列となるようなものをひとつ求めよ.

3 次の各問に答えよ.

(1) n を正整数とする. 実数 t に対して $\exp(t) \geq \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{t^k}{k!}$ を示せ.

(2) $\int_0^1 \exp(-x^2) dx$ と 0.7 のいずれが大きいか, あるいは等しいかを判定し, 理由とともに述べよ.

4 次の各問に答えよ.

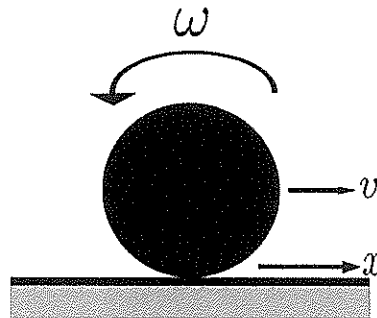
(1) $\cos z = \sqrt{-1}$ を満たす複素数 z のうち, z の実部 $\operatorname{Re} z$ が $-\pi < \operatorname{Re} z \leq \pi$ にあるものを全て求めよ.

(2) $a > 0$ とする. 次の積分の値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + 1} dx.$$

5

水平な粗い床の上を滑らせながら転がした円板の運動を考える。図のように、床と平行に、右向きを正方向とする x 軸をとる。時刻 0 に、この円板を反時計回りに回転させながら x 軸の正方向に滑り出させるとする。床を滑っている間は円板には動摩擦力が働いており、床に対する円板の接地点の速さは徐々に小さくなり、やがては 0 となって、円板は滑らずに一定の速さで転がるようになる。時刻 t での、円板の重心の位置、重心の速度、反時計回りを正の向きにした回転の角速度、床に対する円板の接地点の速度を、それぞれ、時刻 t の関数として、 $x(t)$, $v(t)$, $\omega(t)$, $u(t)$ と表す。時刻 0 での、円板の重心の位置は $x(0) = 0$ 、重心の速度は $v(0) = v_0 > 0$ 、回転の角速度は $\omega(0) = \omega_0 > 0$ であったとする。ただし、円板は鉛直面内で運動するものとし、円板は一様で、その質量を M 、半径を R 、円板と床との間の動摩擦係数を μ 、重力加速度の大きさを g とする。また、 $u(t)$ の正方向は x 軸の正方向と一致させる。



- (1) 円板の慣性モーメントを M と R を用いて表せ。
- (2) $v(t)$ と $\omega(t)$ を、それぞれ、 $\mu, R, g, v_0, \omega_0, t$ のうち必要なものを用いて表せ。
- (3) $u(t)$ を $\mu, R, g, v(t), \omega(t)$ のうち必要なものを用いて表せ。
- (4) 円板が床を滑りながら進んでいる途中の時刻 t_1 で、円板の重心の速度 $v(t_1)$ が 0 になったとする。 t_1 、および、時刻 0 から時刻 t_1 までの間に重心の進む距離 $x(t_1)$ を、それぞれ、 μ, R, g, v_0, ω_0 のうち必要なものを用いて表せ。
- (5) 円板が滑らずに転がるようになる時刻 t_2 と、時刻 t_2 での重心の速度 $v(t_2)$ を、それぞれ、 μ, R, g, v_0, ω_0 のうち必要なものを用いて表せ。また、 x 軸の正方向にいったん進んだ円板が負方向に動き出すために必要な条件を μ, R, g, v_0, ω_0 のうち必要なものを用いて表せ。

平成31年度4月期/平成30年度10月期
京都大学大学院情報学研究科修士課程
先端数理科学専攻

入学者選抜試験問題

【専門科目】

平成30年7月14日 13:00 - 14:30

- (1) 指示があるまで問題を見てはならない。
- (2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。
- (3) 解答時間は1時間30分である。退室は認めない。
- (4) 専門科目は全部で5題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から1題選択して解答すること。2題以上選択した場合は、問題番号の若い順に1題のみ採点を行う。
- (5) 各受験者に対し、解答用紙1枚と下書用紙(計算用紙)が配布される。開始後、解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
- (6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答すること。解答用紙の裏面を用いる場合は、解答用紙の指示に従って解答すること。
- (7) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1 次の各問のそれぞれに答えよ.

問1 D を複素平面の領域とし, ℓ を D に含まれる有限の長さの閉線分とする. 複素関数 $f(z)$ は D 上で連続であり, D から ℓ を除いた開集合 $D \setminus \ell$ 上で正則であるとする. このとき, $f(z)$ は D 上の正則関数であることを証明せよ.

問2 H を複素 Hilbert 空間とし, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を H の 1 組の完全正規直交系とする. また A は H 上の線型作用素で,

$$\left\| A\varphi_n - \varphi_n - \frac{1}{3}\varphi_{n+1} \right\| < \frac{1}{2^n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たしている. このとき次の問に答えよ. ただしノルム $\| \cdot \|$ は H の内積から定められているものとする.

(1) A は H 上の有界線型作用素であることを証明せよ.

(2) 任意の $f \in H$ に対して $Au = f$ を満たす H の元 u は唯 1 つ存在し, f からこの u への対応は H のノルムに関して連続であることを証明せよ.

2 次の各問のそれぞれに答えよ.

- 問1 xz -平面上の曲線 $z = 1 - x^2$ ($-1 \leq x \leq 1$) を z 軸について回転して得られる xyz -空間の曲面を Γ とし, $\vec{v}(x, y, z)$ は Γ 上の連続な単位法線ベクトルで $\vec{v}(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ を満たすものとする. このとき曲面積分

$$\int_{\Gamma} (x^2, y^2 - xy, z(-x - 2y)) \cdot \vec{v}(x, y, z) dS$$

の値を求めよ. ただし被積分関数中の \cdot はユークリッド内積を表し, dS は曲面 Γ の面素を表す.

- 問2 未知関数 $x(t), y(t)$ の連立常微分方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + x(x^2 + y^2) \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \frac{dy}{dt} &= x + y(x^2 + y^2) \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

の解を求めよ.

- 問3 実数 a と正数 α, β に対して $R_{\alpha, \beta} = \{(x, y) \mid |x| \leq \alpha, |y - a| \leq \beta\}$ とし, $f(x, y)$ は $R_{\alpha, \beta}$ 上の十分滑らかな実数値関数とする. また常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(0) = a$$

は α より小さいある正数 T に対して $|x| \leq T$ で唯1つの解 $y = y(x)$ を持つと仮定する. このとき解 $y(x)$ を近似的に求めるための陽的な2段2位 Runge-Kutta 型公式 (Heun 法など) を導出せよ.

3

次の各問のそれぞれに答えよ.

問1 $S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4, x_3 > 1\}$ とする. $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ は S 上の単位法線ベクトルで, $n_3 > 0$ を満たすようにとられている. このとき

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

に対して, 曲面積分

$$\int_S \nabla f \cdot \mathbf{n} \, dS$$

の値を求めよ. ここに, dS は S の面素とする.

問2 C は複素平面内の円周 $|z| = 2$ で, 反時計回りに向き付けられているとする. 次の2つの積分の値を求めよ.

$$(a) \int_C \frac{\sin z}{z^2} dz \quad (b) \int_C \frac{z}{\sin z^2} dz$$

問3 連立方程式に関する以下の設問に答えよ. ただし, 行列はすべて n 次の実正方行列で, Q は直交行列, W は交代行列 (歪対称行列, あるいは反対称行列ともいう), I は単位行列とする.

- (1) λ を $\lambda \neq \pm 1$ を満たす実数とする. このとき $I + \lambda Q$ は正則であることを示せ.
- (2) 実数 λ が $\lambda \neq \pm 1$ のとき, 与えられた $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$(I + \lambda Q)\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

を満たす $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ を \mathbf{x}_* とする. $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ を任意に与えて

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{b} - \lambda Q\mathbf{x}_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

によって \mathbb{R}^n の点列 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^{\infty}$ を定めるとき, $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_*$ となるために λ の満たすべき必要十分条件を求めよ.

- (3) W の固有値は0か純虚数であることを示せ. さらに, $I + W$ は正則であることを示せ.
- (4) 与えられた $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$(I + W)\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

を満たす $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ を \mathbf{x}'_* とする. $\mathbf{x}'_0 \in \mathbb{R}^n$ を任意に与えて

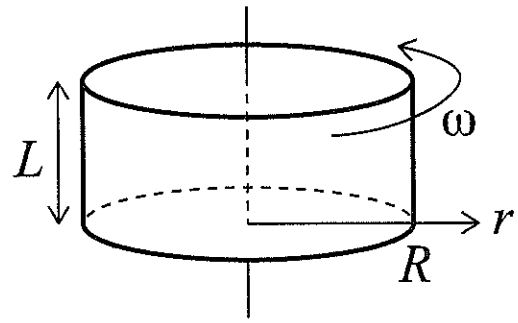
$$\mathbf{x}'_{i+1} = \mathbf{b} - W\mathbf{x}'_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

によって \mathbb{R}^n の点列 $\{\mathbf{x}'_i\}_{i=0}^{\infty}$ を定めるとき, $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}'_i = \mathbf{x}'_*$ となるための必要十分条件を W の適切なノルムを用いて表せ.

4

質量 m の同種粒子 N 個からなる理想気体が、下図のような、半径 R 、高さ L の円柱容器に封じられ、円柱容器の中心軸まわりに容器と共に角速度 ω で回転している系を考える。この系を容器と共に回転する回転座標系で考え、以下の問に答えよ。ただし、系は絶対温度 T の熱平衡状態にあるものとし、ボルツマン定数を k 、プランク定数を h とする。重力、コリオリ力、および粒子の内部自由度は無視する。また N は十分大きいものとする。

- (1) この粒子1つが中心軸から距離 r に位置する時、この粒子の遠心力によるポテンシャルエネルギーを求めよ。ただし、 $r=0$ をポテンシャルエネルギーの原点とせよ。
- (2) この系の分配関数 Z を求めよ。
- (3) この系のヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。



- (4) この系の内部エネルギー E を求めよ。さらに、高温極限および低温極限のそれぞれについて、この系の定積比熱を求めよ。ただし $\omega > 0$ とする。
- (5) $X = \frac{1}{\pi R^2} \left(-\frac{\partial F}{\partial L} \right)_{T,N}$ および $Y = \frac{1}{2\pi RL} \left(-\frac{\partial F}{\partial R} \right)_{T,N}$ を求めよ。さらに、 ω が 0 に近づく極限での X と Y の関係を示し、そのような関係になる理由を、 X および Y それぞれの物理的意味に基づいて述べよ。ただし $T > 0$ とする。

5

次の各問のそれぞれに答えよ。

問1 (x, y) 平面上の2次元流の流速場 (u, v) が

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (x^2 + y^2 \neq 0)$$

で与えられるとき、点 $(x, y) = (2, 1)$ における流体粒子（流体の微小部分）の加速度の x 方向成分を求めよ。

問2 (x, y, z) 空間において x 軸を中心軸とする半径 $R_1, R_2 (> R_1)$ の静止した長い同心2円筒に挟まれた領域を Ω とし、この領域 Ω を占める非圧縮性粘性流体（密度 ρ , 粘性係数 μ ）を考える。 x 軸を中心軸とする円筒座標系を (r, θ, x) とし、この流体の圧力を p , 流速の動径方向成分を u_r , 周方向成分を u_θ , x 軸方向成分を u_x とする。この流体に外力は働かず、流れは定常で、流速は x 軸まわりに回転対称であって x 軸方向に一様であるとする。すなわち、 $p = p(r, \theta, x)$, $u_r = u_r(r)$, $u_\theta = u_\theta(r)$, $u_x = u_x(r)$ とする。このとき以下の設問に答えよ。

なお、この定常非圧縮性粘性流体の円筒座標系における連続の式とナビエ・ストークス方程式は次式で与えられる：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(ru_r) &= 0 \\ u_r \frac{du_r}{dr} - \frac{u_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_r}{dr} \right) - \frac{u_r}{r^2} \right] \\ u_r \frac{du_\theta}{dr} + \frac{u_r u_\theta}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_\theta}{dr} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} \right] \\ u_r \frac{du_x}{dr} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_x}{dr} \right) \right] \end{aligned}$$

- (1) 円筒の壁面 $r = R_1$ および $r = R_2$ において流速 (u_r, u_θ, u_x) の満たすべき条件を書け。
- (2) 境界値問題を解いて圧力 p が $p = ax + b$ で与えられることを示せ。ここで、 a, b は定数である。
- (3) 境界値問題を解いて u_x を r と $R_1, R_2, \rho, \mu, a, b$ のうち必要なものを用いて表せ。