【数学】

注意：【I】,【II】ともに，問ごとにそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

【I】

問 1　次の行列 A について以下の設問に答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(i) $A = PJP^{-1}$ となるような正則行列 P と次のような形式の行列 J が存在する．このとき，実数 a, b を求めよ．また，P をひとつ求めよ．

$$J = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

(ii) J^7 と A^7 を求めよ．

問 2　3 次元実数ベクトル空間について考える．部分空間 S が次のように与えられているとき，以下の設問に答えよ．

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| 2x = 2y = -z \right\}$$

(i) S の基底を求めよ．さらに，S への射影行列 Q を求めよ．

(ii) S の直交補空間 T の基底を求めよ．さらに，T への射影行列 R を求めよ．

(iii) Q の行列式，R の階数，Q^2，および QR を求めよ．

（数学の問題は次ページに続く）

【数学】(続き)

【II】

e をネイピア数 (自然対数の底) とし, $\exp(x) = e^x$ とする.

問 1　正の整数 N と実数 α を用いて, $e = \dfrac{\alpha}{N}$ と表記する. 以下の設問に答えよ.

(i) 指数関数 e^x のマクローリン展開を書け.

(ii) 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$(N-1)!\,\alpha - \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!} < 1$$

(iii) 設問 (ii) の結果を用いて, 実数 α が整数ではないことを示せ.

問 2　実数 x の関数

$$f(x) = \exp(-x - e^{-x}), \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

について, 以下の設問に答えよ.

(i) 次式で定義される $F(x)$ を計算せよ. ただし, 変数変換 $u = -e^{-t}$ を用いよ.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

(ii) 次の積分を計算せよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)f(x)dx$$

(iii) 実数 a, b は定数とする. 次の積分を計算せよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x-b)f(x-a)dx$$

(数学の問題はここまで)

【論理回路】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

問題 1

次の論理関数の最簡積和形を求めよ．

(1) $f = (A + B)(A + \overline{B})(\overline{A} + B)$

(2) $f = ABC + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$

問題 2

D フリップフロップを用いて，図 1 のような 10 進同期式カウンタを考えるとき，以下の設問に答えよ．

(1) Q_3, Q_2, Q_1, Q_0 をカウンタ値（ただし，Q_0 を最小桁とし，0 からカウントする），D_3, D_2, D_1, D_0 を D フリップフロップの状態値とするとき，Q_3, Q_2, Q_1, Q_0 に対する D_3, D_2, D_1, D_0 の真理値表を求めよ．

(2) D_3, D_2, D_1, D_0 を Q_3, Q_2, Q_1, Q_0 の最簡積和形で示せ．

(3) 図 1 の組合せ回路部分をできるだけ構成素子数の少ない AND, OR, NOT 素子を用いて図示せよ．

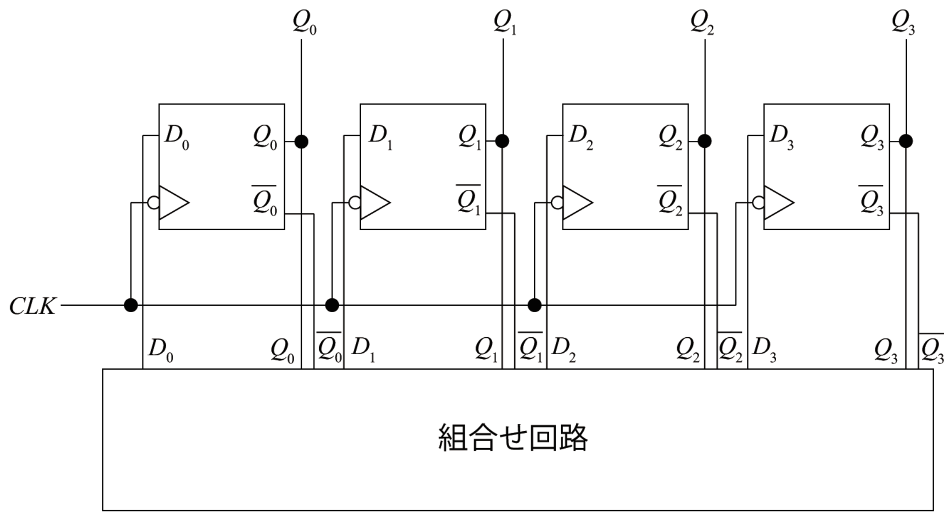

図 1: 10 進同期式カウンタ回路図

（論理回路の問題は次ページに続く）

問題 3

図 2 のタイムチャートによって，入力 X_1, X_2 と出力 Y の関係が定義される順序回路について以下の設問に答えよ．

(1) 破線は安定状態の時刻を示している．入力と出力の組み合わせが異なる安定状態に対してそれぞれ符号を割り当てた状態遷移図を示せ．

(2) 状態の併合によって状態数を最小化し，併合後の各状態に新たな符号を割り当てた状態遷移表を示せ．

(3) 設問 (2) で求めた状態遷移表を実現する順序回路を JK フリップフロップと AND, OR, NOT 素子を用いて図示せよ．

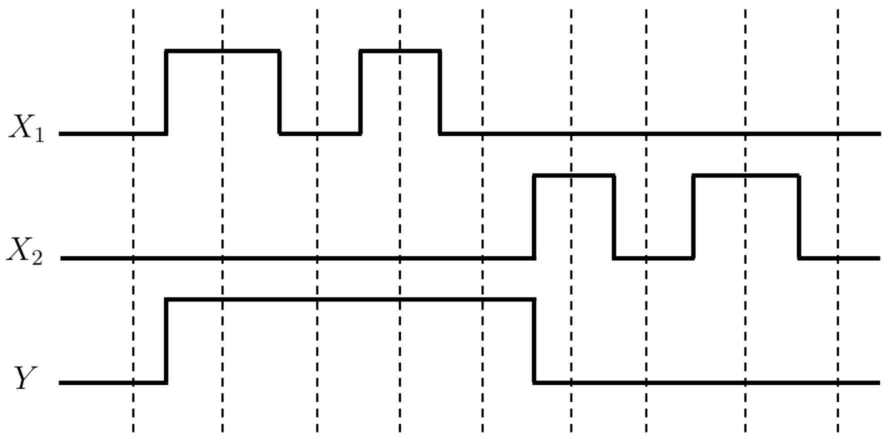

図 2: タイムチャート

（論理回路の問題はここまで）

【工業数学】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること.

問題 1

複素数 $z = x + yi$ の関数 $g(z) = \sqrt{|xy|}$ および $h(z) = 1/(x - yi)$ について, それぞれ微分可能な点があればその点における微分係数を求めよ. また, 微分不可能な点があればその点において微分不可能であることを証明せよ. ただし x, y は実数, i は虚数単位とする.

問題 2

複素数 z の関数

$$f(z) = \frac{1}{z^{\frac{1}{3}}(z+1)}$$

について, 以下の設問に答えよ. ただし, $f(z)$ は実軸の正の部分を切断とした多価関数であり, $f(z)$ の主値を $f_{\mathrm{PV}}(z)$ とおく. $f_{\mathrm{PV}}(z)$ は $0 < \arg(z) < \pi/4$ に対して $\mathrm{Re}(f_{\mathrm{PV}}(z)) > 0$ をとるものとする.

(1) z の極座標表示を $z = re^{i\theta}$ とする. $z \neq 0, z \neq -1$ であるとき, $f(z)$ の全ての値を r, θ を用いて表わせ.

(2) $f(z)$ の $z = -1$ における留数を求めよ.

(3) 複素平面上で原点を中心とする半径 R の円周に沿った積分

$$I(R) = \int_0^{2\pi} f_{\mathrm{PV}}(Re^{i\theta}) R d\theta$$

について, $\lim_{R\to\infty} I(R)$ および $\lim_{R\to+0} I(R)$ をそれぞれ求めよ.

(4) 以下の定積分を求めよ.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}(x+1)} dx$$

問題 3

複素平面上で互いに相異なる複素数 α, β, γ に対し, α, β, γ を頂点とする三角形 $\Delta\alpha\beta\gamma$ を考える. 条件 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ は, $\Delta\alpha\beta\gamma$ が正三角形であるための必要十分条件であることを示せ.

【基本ソフトウェア】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

問題 1

以下に示す C 言語の関数 `f(a,n)` は，`n` 要素 ($n > 1$) の配列 `a` のソートを行うものである．ただし `a` の各要素は，ある条件を満たす `unsigned int` 型の要素 `key` を持つ構造体 `s` へのポインタであり，ソートは `key` の値の昇順で行われる．この関数 `f()` と，`f()` から呼び出される関数 `g()`, `h()`, `comp()` について，設問 (1)〜(3) に答えよ．

```
void g(struct s **a, int m) {
  int i, j;  struct s *p = a[m];  unsigned int x = p->key;
  for (i=m; i>0; i=j) {
    j = ((i+1)>>1)-1;
    if ((a)________)  break;
    a[i] = (b)________;
  }
  a[i] = (c)________;
}
int comp(struct s **a, int j, int m, unsigned int x) {
  unsigned int y = (j<=m) ? a[j-1]->key : 0,  z = (j<m) ? a[j]->key : 0;
  if (x>y && x>z)  return(-1);
  return(y>z);
}
void h(struct s **a, int m) {
  int i, j, c;  struct s *p = a[m];  unsigned int x = p->key;
  a[m] = (d)________;
  for (i=0; ; i=j) {
    j = ((i+1)<<1);  c = comp(a, j, m, x);
    if (c<0) break;
    j -= c;  a[i] = (e)________;
  }
  a[i] = (f)________;
}
void f(struct s **a, int n) {
  int i;
  for ((g)________; (h)________; i++)  g(a, i);
  for ((i)________; (j)________; i--)  h(a, i);
}
```

(1) 下線部 (a)〜(j) を C 言語の式（代入式を含む）で埋めて，関数 `f()`, `g()`, `h()` を完成させよ．なおその際，ソートに要する時間ができるだけ短くなるように配慮せよ．

(2) 関数 `f()` が正しく動作するために，`key` の値が満たすべき「ある条件」（必要十分条件）が何であるかを示せ．また関数 `comp()` の中の二重下線を施した三つの式のうち，`key` の値が任意の `unsigned int` 型データである場合にも正しく動作するために修正が必要なものを全て挙げ，かつそれらについて修正した式を示せ．

(3) 関数 `f()` が用いているアルゴリズムの名称を示せ．またこのアルゴリズムとクイックソートとの優劣を，平均時間計算量，最悪時間計算量，作業領域量，および安定性の観点で簡潔に議論せよ．

（基本ソフトウェアの問題は次ページに続く）

【基本ソフトウェア】（続き）

問題 2　プロセスのスケジューリングに関する次の設問に答えよ．ただし，すべての設問においてタイムスライスは 1 とし，プロセス切り替えに要するオーバーヘッドは無視できるものとする．

(1) 単一コアで構成される単一 CPU での実行を考える．処理時間と実行可能キューへの到着時刻が表 1 に示されるプロセス A～D を処理する場合，次の(a)～(c)のスケジューリング方式によって得られる処理系列を示し，平均ターンアラウンド時間を求めよ．

(a) 到着順スケジューリング（first-come first-served）
(b) 処理時間順スケジューリング（shortest job first）
(c) ラウンドロビン（round-robin）

(2) 4 コアで構成される単一 CPU での実行を考える．

(i) 処理時間と必要コア数が表 2 に示されるプロセス A～D を処理する場合，メイクスパン（全プロセスの終了時間）が短くなるのは，次の(a), (b)による優先度順スケジューリングのどちらであるかを述べよ．また，その値を示せ．ただし，すべてのプロセスは時刻 0 の時点ですでに到着しているものとする．また，優先度が等しい場合は必要コア数が少ない方を優先する．

(a) 処理時間が短い方が高優先度
(b) 処理時間と必要コア数の積が小さい方が高優先度

(ii) 設問(i)のスケジューリングにおいて，各プロセスについて最初に決まる実行開始時刻を遅らせない条件のもと，プロセスの実行順序を変更可能とする場合，メイクスパンを短縮できるものは(a), (b)のどちらであるかを述べよ．また，短縮の結果得られるメイクスパンを示せ．

表 1

プロセス	処理時間	到着時刻
A	1	2
B	4	0
C	2	3
D	3	1

表 2

プロセス	処理時間	必要コア数
A	1	3
B	4	1
C	1	4
D	3	2

（基本ソフトウェアの問題はここまで）

【確率統計】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること.

問題 1 確率変数 $X_1, \ldots, X_n,\ Y_1, \ldots, Y_m$ は独立に正規分布に従い，$X_i \sim N(a\theta, \sigma^2),\ Y_j \sim N(b\theta, \sigma^2),\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m$ とする．ただし，$N(\mu, \sigma^2)$ は平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布を表す．ここで n, m は正の整数，a, b は正の定数で既知とし，$\theta,\ \sigma^2$ は未知パラメータである．このとき以下の設問に答えなさい.

(1) $\theta,\ \sigma^2$ について，$X_1, \ldots, X_n,\ Y_1, \ldots, Y_m$ をすべて用いた最尤推定量を求めなさい.

(2) 定数 α, β を用いて $\tilde{\theta} = \alpha\bar{X} + \beta\bar{Y}$ と定義する．ただし $\bar{X} = (X_1 + \cdots + X_n)/n,\ \bar{Y} = (Y_1 + \cdots + Y_m)/m$ である．$\tilde{\theta}$ の期待値 $E(\tilde{\theta})$ と分散 $V(\tilde{\theta})$ を求めなさい.

(3) $\tilde{\theta}$ が θ の不偏推定量となるために α, β が満たす条件を求めなさい．また，不偏推定量となる $\tilde{\theta}$ が $V(\tilde{\theta})$ を最小にするときの α, β の値を求めなさい.

（確率統計の問題は次ページに続く）

【確率統計】　（続き）

問題２　あるコインを投げると，確率 p $(0 < p < 1)$ で表，確率 q $(= 1 - p)$ で裏が出る．このコインを表が出るまで連続して投げ続ける．ただし，毎回のコイン投げは独立な試行である．初めて表が出るまでに投げた回数（表が出た試行を含む）を確率変数 T で表す．以下の設問に答えなさい．

(1) $T = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ となる確率 $P(T = n)$ を求めなさい．ただし，$P(\cdot)$ は確率を表す．

(2) 確率変数 T の期待値（平均）と分散を求めなさい．

あるスロットマシン（窓は一つとする）を引くと，m 種類 $(m = 1, 2, \ldots)$ の異なる図柄が等確率で出る．便宜上，m 種類の図柄のそれぞれに $\{1, 2, \ldots, m\}$ の異なる番号を付ける．このスロットマシンを連続して引くことを考え，n 回目 $(n = 1, 2, \ldots)$ に引いた際に出た図柄の番号を確率変数 $X_n \in \{1, 2, \ldots, m\}$ で表す．ただし，スロットマシンを引く試行は独立である．この時，m 種類の図柄のうち異なる図柄が初めて i 種類 $(i = 1, 2, \ldots, m)$ になるまでスロットマシンを引いた回数を $T_{m,i}$ と表すと，

$$T_{m,i} = \begin{cases} 1 & (i = 1) \\ \min\left\{n > T_{m,i-1} \mid X_n \neq X_j; j = 1, \ldots, n-1\right\} & (i = 2, \ldots, m) \end{cases}$$

と再帰的に定義できる．以下の設問に答えなさい．

(3) 確率変数 $U_{m,i}$ $(i = 2, \ldots, m)$ として，

$$U_{m,i} \equiv T_{m,i} - T_{m,i-1}$$

とする．$U_{m,i} = k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ となる確率 $P(U_{m,i} = k)$ を求めなさい．

(4) すべての図柄が初めて出るまでスロットマシンを引いた回数 $T_{m,m}$ に対し，その期待値（平均）が以下の式で与えられることを示しなさい．

$$1 + m \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j}$$

(確率統計の問題はここまで)

【制御工学】

注意：問題毎にそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

問題 1　以下の設問に答えよ．

(1) 図 1 のフィードバック制御系において，

$$P(s) = \frac{1}{s(s+3)}, \quad K_1(s) = \frac{cs+a}{s}, \quad K_2(s) = b$$

とする．a, b, c は定数パラメータである．$c = 1$ のとき，制御系が安定となる定数の組 (a, b) の範囲を図示せよ．

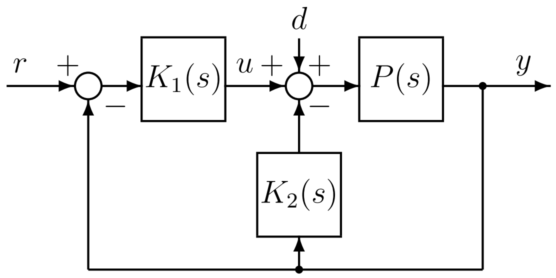

図 1

(2) 設問 (1) の制御系において $c = 0$, $a = 1$, $b = 1$ とする．外部入力 r と d を

$$r(t) = 3, \quad d(t) = 2\sin t$$

とするとき，定常状態での出力 $y(t)$ を求めよ．

(3) 設問 (1) の制御系において，$c = 0$, $b = 2$ とする．パラメータ a を 0 から ∞ まで変化させた時の根軌跡を描け．

（制御工学の問題は次ページに続く）

【制御工学】（続き）

問題 2　以下の設問に答えよ．

(1) 下記の伝達関数 $G(s)$ のゲイン線図を折れ線近似で描け．

$$G(s) = \frac{100s + 10}{s(s + 10)}$$

(2) ナイキストの安定判別法を用いて図 2 の制御系が安定か否か判定せよ．

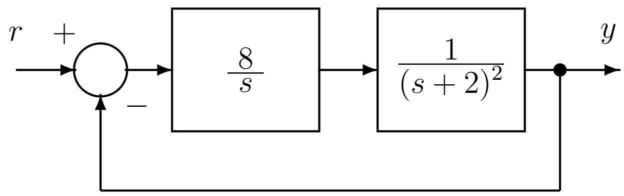

図 2

（制御工学の問題はここまで）